1. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

2. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2>,\ b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a^2}>0,\ \frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

3. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

4. 다음은 실수 a, b 에 대하여 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 이성립함을 증명한 것이다.

(증명) $|a+b| \geq 0, |a|+|b| \geq 0$ 이므로
$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$ 을 증명하면 된다.
$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$
$= 2(|ab| - ab)$
그런데, (가) 이므로 $2(|ab| - ab) \geq 0$
$\therefore\ |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$
따라서 $|a+b| \leq |a|+|b|$
여기서, 등호가 성립하는 경우는 (나) 일 때,
즉, $ab \geq 0$ 일 때이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① $|ab| \geq ab, a = b$

② $|ab| \geq ab, |ab| = ab$

③ $|ab| \leq ab, |ab| = ab$

④ $|ab| = ab, a = 0$

⑤ $|ab| = ab, a = b$

해설

(가) : $|ab| \geq ab$($\because$ $|ab|$는 항상 양수)
(나) : $2(|ab| - ab) = 0$ 일 때, 즉 $|ab| = ab$

5. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 <u>아닌</u> 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x > -1$ 일 때만 성립한다.

㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2 \geq 0$

(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)

㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$

$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$

$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$

$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$

(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)

㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때

$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로

$\lvert x+y\rvert < \lvert x-y\rvert$

따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

6. $x > 3$일 때 $\dfrac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0,\ \dfrac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

$$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$$

$$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \dfrac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

7. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

8. $x > y > 0$인 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x}{1+x}$, $\dfrac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$ ② $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{y}{1+y}$ ③ $\dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

④ $\dfrac{x}{1+x} \geq \dfrac{y}{1+y}$ ⑤ $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y}$

해설

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

9. 다음 부등식 중 성립하지 않은 것은?

① $|a|-|b| \geq |a-b|$

② $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

③ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

④ $a^2+ab+b^2 \geq 0$

⑤ $a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$

해설

① 반례 : $a=-1$, $b=1$

$|-1|-|1| \geq |-1-1|$

$|-1|-|1| \geq |-2|$

$1-1 \geq 2 \rightarrow 0 \geq 2 \rightarrow (\times)$

② $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

③ $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 \geq a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

$a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2 \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

④ $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geq 0 \rightarrow (\bigcirc)$

⑤ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+1$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0 \rightarrow (\bigcirc)$

10. 다음은 실수 a, b, c 가 모두 양수일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ 임을 보이는 과정이다. [㉮] 안에 들어갈 알맞은 식은?

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\ [㉮] \geq 0 \end{aligned}$$

① $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

② $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

③ $(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$

④ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

⑤ $(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2$

해설

① $\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2\}$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$