1. $x^4 - 6x^2 + 8$ 를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2 - 2)(x^2 - 4)$

② $(x^2 - 2)(x - 4)(x + 4)$

③ $(x^2 - 2)(x - 2)(x + 2)$

④ $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$

⑤ $(x^2 - \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 + 8 &= (x^2)^2 - 6x^2 + 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 - 4) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x^2 - 2)\end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$$

$$f(2) = 0, \quad f(-2) = 0,$$

즉, $(x - 2)(x + 2)$ 로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

2. $x^3 + x^2 - 8x - 12$ 를 인수분해하면 $(x-3)$ 이다. 이 때, □안에 알맞은 식은?

① $(x+2)^2$ ② $(x-2)^2$ ③ $(x+1)^2$

④ $(x-3)^2$ ⑤ $(x+3)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 1 & 1 & -8 & -12 \\
 & & 3 & 12 & 12 \\
 \hline
 -2 & 1 & 4 & 4 & 0 \\
 & & -2 & -4 & \\
 \hline
 -2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & -2 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & &
 \end{array}$$

$x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x-3)(x+2)^2$

$\therefore \square = (x+2)^2$

3. 등식 $(1 - 2i)x + (2 + i)y = 4 - 3i$ 를 만족하는 실수 $x + y$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(1 - 2i)x + (2 + i)y = 4 + 3i = 0$ 에서
 $(x + 2y - 4) + (-2x + y + 3)i = 0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x + 2y - 4 = 0, -2x + y + 3 = 0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $x = 2, y = 1$
 $\therefore x + y = 3$

4. $\frac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}}$ 를 간단히 하면?

- ① $-\frac{1}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9}i$ ② $\frac{1}{9} + \frac{4\sqrt{5}}{9}i$ ③ $1 - \frac{4\sqrt{5}}{9}i$
④ $1 + 4\sqrt{5}i$ ⑤ $-1 - 4\sqrt{5}i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}} &= \frac{2-\sqrt{5}i}{2+\sqrt{5}i} \times \frac{2-\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i} \\ &= \frac{4-4\sqrt{5}i-5}{4+5} \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9}i\end{aligned}$$

5. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

- ① i ② $-i$ ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(1-2i+i^2) + (1+2i+i^2)}{1-i^2} \\ &= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0\end{aligned}$$

6. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

7. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

8. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, $a - b + c$ 의 값은?

$$x^2 - 2x + 4 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$$

- ① 8 ② 7 ③ 3 ④ 0 ⑤ -3

해설

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 값을 대입하여도 성립한다.

$x = 0$ 을 대입하면

$$4 = 2a \quad \therefore a = 2$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$3 = -b \quad \therefore b = -3$$

$x = 2$ 을 대입하면

$$4 = 2c \quad \therefore c = 2$$

$$\therefore a - b + c = 2 - (-3) + 2 = 7$$

9. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 7$ 을 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 5이다. 이 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + ax + 7$$

$$f(x) = (x+2)Q(x) + 5$$

$$\therefore f(-2) = 5$$

$$f(-2) = 16 - 12 - 2a + 7 = 5$$

$$\therefore a = 3$$

10. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

- ① 9 ② 4 ③ -9 ④ -3 ⑤ -12

해설

$$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$$

$$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$$

$$p = -3, q = -12, \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$$

11. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore Q(x) = 2x - 1$$

$$\therefore \text{상수항은 } -1$$

12. $(1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2 + x - 6) + (x^2 - x - 2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 이어야
하므로 $x = -3$ 또는 $x = 2$ 이다.
그런데 $x^2 - x - 2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x = -3$

13. a, b 가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$ 을 만족하는 a, b 의 값의 합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$ 에서
 $(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
 a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$
 $\therefore a=1, b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

14. $(m^2 - 4)x - 1 = m(3x + 1)$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 상수 m 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -4 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(m^2 - 3m - 4)x - 1 - m = 0$ 의 해가 없으므로
 $m^2 - 3m - 4 = 0$ 이고 $-m - 1 \neq 0$
 $\therefore m = 4$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x-2$ 로 나누어서 떨어진다. 이 다항식을 $(x+1)(x-2)$ 로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $-x+2$

③ $x-1$

④ 2

⑤ 3

해설

$$R(x) = ax + b \text{라 두면}$$

$$R(-1) = -a + b = 3, R(2) = 2a + b = 0$$

$$a = -1, b = 2 \text{이므로 } R(x) = -x + 2$$

16. $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 을 $A(x-3)^3 + B(x-3)^2 + C(x-3) + D$ 로 나타낼 때, $ABCD$ 의 값을 구하면?

- ① -20 ② 40 ③ -60 ④ 120 ⑤ -120

해설

$x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 을 $x - 3$ 에 대해 내림차순으로 정리하기 위해 $x - 3$ 으로 반복하여 나누면 나머지가 차례로 D, C, B, A 가 되므로

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3 & 1 & -4 & 5 & -3 \\
 & & 3 & -3 & 6 \\
 \hline
 3 & 1 & -1 & 2 & 3 & \leftarrow d \\
 & & 3 & 6 & \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 8 & \leftarrow c \\
 & & 3 & \\
 \hline
 & 1 & 5 & \leftarrow b \\
 & \uparrow & & \\
 & a & &
 \end{array}$$

$\therefore ABCD = 1 \times 5 \times 8 \times 3 = 120$

17. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ 으로 정의할 때,

$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2014)$ 의 값은?

① -2014

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 2014

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$f(n) = (-i)^n + (i)^n$$

$$f(1) = (-i)^1 + i^1 = 0$$

$$f(2) = (-i)^2 + i^2 = -2$$

$$f(3) = (-i)^3 + i^3 = 0$$

$$f(4) = (-i)^4 + i^4 = 2$$

$$2014 = 4 \times 503 + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2014) \\ = 503 \times (0 - 2 + 0 + 2) + 0 - 2 = -2$$

18. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$(\text{준식}) = a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$$

$$= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\}$$

$$= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\}$$

$$= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2)$$

$$= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\}$$

$$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$$

19. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z \\ &= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

20. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2$ 을 계산하여라.

① 99

② 100

③ 4950

④ 5050

⑤ 10000

해설

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + 99^2 \\ &= 99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2 \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \\ & \quad \dots + (3^2 - 2^2) + 1^2 \\ &= (99-98)(99+98) + (97-96)(97+96) + \dots + (3-2)(3+2) + 1 \\ &= (99+98) + (97+96) + \dots + (3+2) + 1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 \\ &= (1+99) + (2+98) + \dots + (49+51) + 50 \\ &= 4950 \end{aligned}$$