

1. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

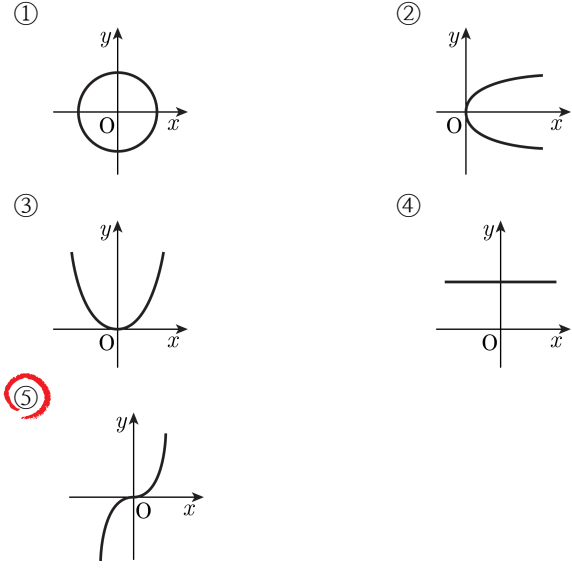
함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응



3. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?



해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

4. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$$y = 2x - 2, x = \frac{1}{2}y + 1 \quad x, y \text{ 를 바꿔주면}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

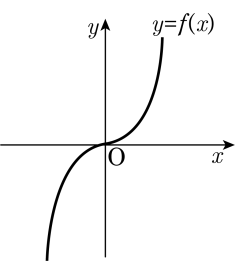
⑤ $\frac{7}{2}$

해설

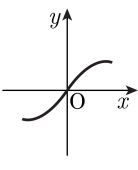
$$f^{-1}(2) = a \text{ 라 하면, } f(a) = 2 \text{ 이므로 } 2a - 3 = 2$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

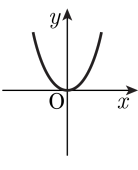
6. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은
무엇인가?



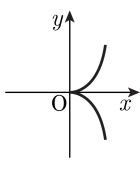
①



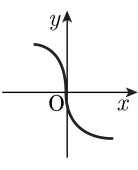
②



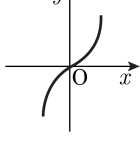
③



④



⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

7. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

- ① $x \rightarrow x - 1$
- ② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근
- ③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지
- ④ $x \rightarrow x^2 - 1$
- ⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

- ① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

8. 다음은 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일대응인 것은 무엇인가?
- ① $y = -x^2$

③ $y = 3$

⑤ $y = \sqrt{2}x - 2 \ (x \geq 1)$

② $y = -|x|$

④ $y = -2x - 1$

해설

① $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로 일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1) = f(1) = -1$ 이므로 일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) \leq 0$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

③ 모든 $x \in X$ 에 대하여 $f(x) = 3$ 이므로 일대일 함수가 아니다.

또, $f(X) = 3$ 이므로 (공역) $\neq$ (치역)

④ 일대일 함수이고 (공역)=(치역)=(실수 전체의 집합) 이므로 일대일대응이다.

⑤ $x \geq 1$ 일 때, $f(X) \geq 0$ 이므로 일대일 함수이지만 (공역) $\neq$ (치역) 이다.

9. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

10. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

11. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

12. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f

② f^{-1}

③ g

④ g^{-1}

⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

13. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x + 12)$ 를 만족시키고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(13) = f(1 + 12) = f(1)$$

$$f(25) = f(13 + 12) = f(13) = f(1)$$

$$f(37) = f(25 + 12) = f(25) = f(1)$$

$$\text{따라서 준식은 } f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$$

14. 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3, y = 3$ 일 때

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$$

$x = 9, y = 3$ 일 때

$$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

15. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

17. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

18. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

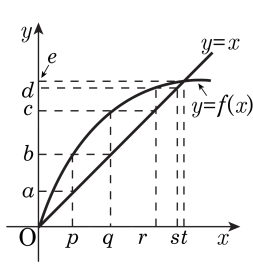
$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

19. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

- ① p
- ② q
- ③ r
- ④ s
- ⑤ t



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots \cdots \textcircled{1}$
 그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = r$
 $\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$
 $\therefore x = q$

20. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \geq 0) \\ 1-x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f^{-1}(3) = b$ 라고 하면 $f(b) = 3$ 에서 $2b+1=3$

$\therefore b=1$

이 때, $f^{-1}(3) + f^{-1}(a) = 0$ 에서

$1 + f^{-1}(a) = 0, f^{-1}(a) = -1$

$\therefore f(-1) = a$

$\therefore a = 1 - (-1)^2 = 0$