1. 이차방정식 $(x-1)(x+3)=7$의 해는?

① $\frac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$ ② $\frac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$ ③ $-2\pm\sqrt{11}$
④ $-1\pm\sqrt{11}$ ⑤ $1\pm\sqrt{11}$

해설

$(x-1)(x+3)=7$, $x^2+2x-3-7=0$,
$x^2+2x-10=0$
근의 공식에 의해 $x=-1\pm\sqrt{1^2+10}=-1\pm\sqrt{11}$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2+a(a-1)x+3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1 ② -3 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x=1$을 대입하면

$1^2+a(a-1)+3a=0$

$a^2+2a+1=(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

$x^2-1\cdot(-2)x-3=x^2+2x-3$

$=(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,-3 \quad \therefore\ x=-3$

3. 이차방정식 $2x^2-x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{5}{2}$

해설

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{5}{2}$

4. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a < -1$

해설

(두 근의 곱)$= a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

5. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

6. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

7. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

8. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 <u>서로 다른</u> 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.
$D' = 1^2 - (k-3) > 0$
$\therefore\ k < 4$
$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

9. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7)+3=0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7)+3=0$
$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
x^2의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ii) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D<0$이어야 하므로
$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
$37 + 12k < 0$
$\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4이다.

10. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

11. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

12. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$　　② $x^2+2x+5=0$

③ $x^2+5x+2=0$　　④ $x^2-2x+5=0$

⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$

$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore x^2-2x+5=0$

13. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로

두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$

두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

15. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

16. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

17. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

18. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

19. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 두 근의 합은 2이다.

② 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 두 근의 차는 4이다.

③ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 두 근의 곱은 5이다.

④ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은 -6이다.

해설

$ax^2 + bx + c = 0$에서

두근의 합 : $-\frac{b}{a}$

두근의 곱 : $\frac{c}{a}$

두근의 차 : $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$

$\therefore$ ② (두근의 차)$= 4i$

20. 이차방정식 $x^2 + 2(m-1)x - 2m - 6 = 0$의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m의 범위는 ?

① $m < 1$　　② $-3 < m < 1$

③ $m < -3$ 또는 $m > 1$　　④ $m > -3$

⑤ $m < -1$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta < 0$

($\because$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(m-1) > 0 & \therefore\ m < 1 \\ \alpha\beta = -2m - 6 < 0 & \therefore\ m > -3 \end{cases}$$

$\therefore\ -3 < m < 1$

21. 이차방정식 $x^2-6x+2k=0$의 두 근의 비가 $1\ :\ 2$일 때, 상수 k의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 근의 비가 $1\ :\ 2$이면 두 근을
$\alpha,\ 2\alpha$(단, $\alpha \neq 0$)라 놓을 수 있다.
$x^2-6x+2k=0$의 두 근이 $\alpha,\ 2\alpha$이므로
근과 계수의 관계에서 $\alpha+2\alpha=3\alpha=6$ …… ㉠
$\alpha \cdot 2\alpha=2\alpha^2=2k$ …… ㉡
㉠에서 $\alpha=2$
㉡에서 $k=\alpha^2$ $\therefore\ k=4$

22. x에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$을 풀 때, a를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, b를 잘못 보아 -2, 5를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

① $x = -1$ 또는 $x = -2$ ② $x = -1$ 또는 $x = 2$

③ $x = 0$ 또는 $x = 2$ ④ $x = 1$ 또는 $x = 2$

⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$에서

(i) 처음에는 x의 계수 a를 잘못 보고,

상수항 b를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}$, 4의 곱은 옳다.

따라서 $b = 2$

(ii) 두 번째는 상수항 b를 잘못 보고, x의 계수 a를 바르게 보았으므로

두 근 -2, 5의 합은 옳다.

따라서 $a = 3$,

$\therefore$ 주어진 이차방정식은

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = 2$

23. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$
㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>
㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

24. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3+11i}{8}$ ② $\dfrac{9+11i}{8}$ ③ $\dfrac{3+9i}{10}$
④ $\dfrac{3+11i}{10}$ ⑤ $\dfrac{9+11i}{10}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3-i} &= \frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{6-3+11i}{10} \\ &= \frac{3+11i}{10}\end{aligned}$$

25. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$
$\quad =2k-2i-2ki$
$\quad =2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0 이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$