1. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$　　② $-r(x)$　　③ 0

④ $r(x)$　　⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$

$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$

$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$

$= g(x)\left\{Q(x) - 1\right\} - r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

2. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 14　　⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

3. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　② $a+b=x+y$　③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
④ $x=y$　⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수$)$
따라서, $ay=bx$ 에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

4. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0

④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$$
$$=(A+x^4)^3$$
$$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$$
$$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

5. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-(b-c)^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2=2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

6. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

7. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots$ ①

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$x + \frac{1}{x} = 1$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$

① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$

8. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x\neq 1$인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

9. x에 대한 항등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

계수비교법에 의하여

$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$

$= cx^2 + (b-c)x + a - b$

$x^2 - 2x + 3 = cx^2 + (b-c)x + a - b$에서

$c = 1,\ b - c = -2,\ a - b = 3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a = 2,\ b = -1,\ c = 1$

10. x의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

① $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$

③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ ④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$

⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(i) $f(x)$를 n차의 식이라하면
좌변 :$2n$차=우변 :$n+3$차
$\therefore\ n = 3$

(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$(단, $k \neq 0$)
($\because\ f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 $= kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 $= kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$\therefore\ kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$-3k = -(k+2)$
$k = 2$에서 $k = 1$
$\therefore\ f(x) = x(x-1)(x-2)$

11. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$ 이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a \quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b \quad \therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

12. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2 Q(x)+2^{10}(x-2)$

$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로

$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.

$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$

$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$

$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x-1)$

$\qquad\qquad\qquad = x^2-3x+2$

$a=-3,\ b=2$

$\therefore\ 3b-2a=12$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

14. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
$= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

15. 다항식 x^4-3x^2+ax+5를 $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은?

① 0　② 2　③ 3　④ -2　⑤ -3

해설

$x^4-3x^2+ax+5=f(x)$라 놓자.
$f(-2)=3$에서 $-2a+9=3$
$\therefore\ a=3$

16. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1)=P(2)=P(3)=0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4)=3\times 2\times 1=6$

17. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\dfrac{-9b}{-25b}=\dfrac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

18. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$ ② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$ ④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설

$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

19. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3+c^3a^2-c^2a^3$

$= (b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+b^2c^2(b-c)$

$= (b-c)\{(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2\}$

$= (b-c)\{(c^2-a^2)b^2-a^2(c-a)b-a^2c(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{(c+a)b^2-a^2b-a^2c\}$

$= (b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c+ab(b-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

20. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

21. $a-b=1+i$, $b-c=1-i$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$a-b=1+i\ \cdots\cdots$ ㉠

$b-c=1-i\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(1+i)^2+(1-i)^2+(-2)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{1+2i-1+1-2i-1+4\}$

$=2$

22. x에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$를 만족한다. 이 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$　　② $xf(x)$
③ $x(x+1)f(x)$　　④ $(x-1)f(x)$
⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$에서
① 다항식 $f(x)$에 대하여 $x = 0, -1$을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$
② 다항식 $g(x)$에 대하여 $x = 1, -1$을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$
③ 다항식 $h(x)$에 대하여 $x = 0, 1$을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$
①, ②, ③으로부터
$f(x), g(x), h(x)$의 최대공약수를 G라 하면
$f(x) = x(x+1)G$, $g(x) = (x-1)(x+1)G$, $h(x) = x(x-1)G$
$\therefore$ $f(x), g(x), h(x)$의 최소공배수는
$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$

23. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1 \therefore\ a+b=2$

24. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$이다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면
$A = Ga, B = Gb$(a, b는 서로소)
$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$
$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$
$\therefore\ G = x + 2$

25. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore g$ 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g'$, $R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore g'$ 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 $\{g \mid g$ 는 A, B 의 공약수$\} = \{g' \mid g'$ 은 B, R 의 공약수$\}\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′　　② ㉡, ㉡′　　③ ㉢
④ ㉣　　⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.