1. 중심이 $(2,-1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2+(y+1)^2=5$　② $(x-1)^2+(y+1)^2=7$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=8$　④ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

해설

구하는 원의 방정식을
$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$　…㉠으로 놓으면
이 원이 원점 $(0,0)$ 을 지나므로
$(0-2)^2+(0+1)^2=r^2$
$\therefore r^2=5$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 $(2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원

② 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

③ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

④ 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

⑤ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$
$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$
$\therefore \quad$ 중심은 $(2,\ -1)$ 이고,
반지름은 4 이다.

3. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

4. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

5. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
$x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
$(1+m^2)x^2+2mkx+$ (가) $=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
$D=0$ 에서
$k=\pm$ (나)
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm$ (나)

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$ ② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$ ④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉 $r^2(m^2+1)=k^2,\ k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

6. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow\ x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25,\ x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow\ a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow\ a=4$

7. 두 원 $x^2+y^2-4x=0, x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-6x-2y+8)+k(x^2+y^2-4x)=0$
위 식이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
$x=1, y=0$ 을 대입하면 $3-3k=0, k=1$
$k=1$ 을 위식에 대입하여
정리하면 $x^2+y^2-5x-y+4=0$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$a=\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$ 이다.

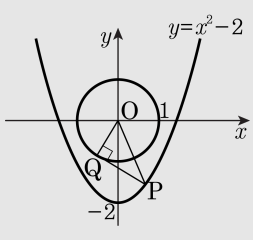
8. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\mathrm{P}(x,\ x^2-2)$, $\mathrm{O}(0,0)$ 라고 하면 $\triangle \mathrm{OPQ}$는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OQ}}^2 \\ &= x^2 + (x^2-2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$



$\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 의 최솟값은 $x^2 = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

9. 두 원 $x^2+y^2+4x-ay+b=0$, $x^2+y^2+2x+by+a+2=0$ 의 두 교점을 지나는 직선의 방정식이 $x+y+1=0$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 원의 교점은
$x^2+y^2+4x-ay+b-k(x^2+y^2+2x+by+a+2)=0$ 으로 나타낼 수 있다.
문제에서 교점을 지나는 직선이므로 $k=1$
$\Rightarrow \quad 4x-ay+b-2x-by-a-2=0$
$\Rightarrow \quad x-\dfrac{(a+b)}{2}y+\dfrac{b-a-2}{2}=0$
$\therefore \quad a+b=-2, \quad b-a-2=2$
$\Rightarrow \quad a=-3 \quad b=1$
$\therefore a+b=-2$

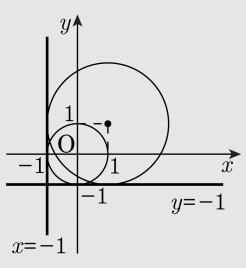
10. 두 원 $x^2+y^2=1,\ (x-1)^2+(y-1)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x=-2,\ y=-1$　② $x=1,\ y=1$

③ $x=-1,\ y=1$　④ $x=1,\ y=-1$

⑤ $x=-1,\ y=-1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이 존재하고 그 식은 각각

$x=-1,\ y=-1$