

1. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$

④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

해설

구하는 원의 방정식을

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1} \text{으로 놓으면}$$

이 원이 원점 $(0,0)$ 을 지나므로

$$(0-2)^2 + (0+1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

- ① 중심이 (2, 1) 이고 반지름의 길이가 1 인 원
- ② 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ③ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ④ 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원
- ⑤ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

\therefore 중심은 (2, -1) 이고,

반지름은 4 이다.

3. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

4. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2, 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

5. 다음은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인

접선의 방정식을 $y = mx + k$ 라 하자.

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식

$x^2 + y^2 = r^2$ 에 대입하여 정리하면,

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + \boxed{\text{가}} = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$D = 0$ 에서

$$k = \pm \boxed{\text{나}}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \boxed{\text{나}}$$

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

② $r^2 - k^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

③ $k^2 - r^2, \sqrt{m^2 + 1}$

④ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 + 1}$

⑤ $k^2 - r^2, r\sqrt{m^2 - 1}$

해설

직선 $y = mx + k$ 를 원의 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ 에

대입하면, $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,

$$\frac{D}{4} = m^2k^2 - (1 + m^2)(k^2 - r^2) = m^2r^2 + r^2 - k^2$$

원과 직선이 접하므로 $D = 0$,

$$\text{즉 } r^2(m^2 + 1) = k^2, k = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore \text{가) : } k^2 - r^2, \text{나) : } r\sqrt{m^2 + 1}$$

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$$

$$\Rightarrow a = 4$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② $-\frac{5}{2}$

③ $\frac{3}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

위 식이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$x = 1, y = 0 \text{ 을 대입하면 } 3 - 3k = 0, k = 1$$

$k = 1$ 을 위식에 대입하여

$$\text{정리하면 } x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 $a + b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$ 이다.

8. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

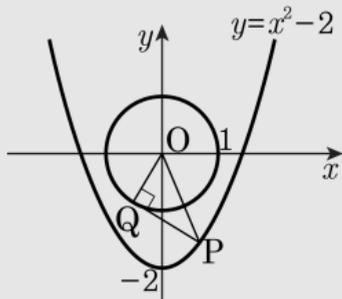
해설

$P(x, x^2 - 2)$, $O(0, 0)$ 라고 하면 $\triangle OPQ$ 는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 \\ &= x^2 + (x^2 - 2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

\overline{PQ}^2 의 최솟값은 $x^2 = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서, \overline{PQ} 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



9. 두 원 $x^2 + y^2 + 4x - ay + b = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + by + a + 2 = 0$ 의 두 교점을 지나는 직선의 방정식이 $x + y + 1 = 0$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

두 원의 교점은

$x^2 + y^2 + 4x - ay + b - k(x^2 + y^2 + 2x + by + a + 2) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

문제에서 교점을 지나는 직선이므로 $k = 1$

$$\Rightarrow 4x - ay + b - 2x - by - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{(a+b)}{2}y + \frac{b-a-2}{2} = 0$$

$$\therefore a + b = -2, \quad b - a - 2 = 2$$

$$\Rightarrow a = -3 \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = -2$$

10. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하면?

① $x = -2, y = -1$

② $x = 1, y = 1$

③ $x = -1, y = 1$

④ $x = 1, y = -1$

⑤ $x = -1, y = -1$

해설

그림을 그려보면 두 개의 공통접선이
존재하고 그 식은 각각

$x = -1, y = -1$

