

1. 10 이하의 3의 배수의 집합을 S 라고 할 때, 다음 중 올바르게 말한 사람을 찾아라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 김조국

해설

10 이하의 3의 배수는 3, 6, 9이다.
 $\therefore S = \{3, 6, 9\}$
최상위 : 12는 집합 S 의 원소가 아니다.
김조국 : 3은 집합 S 의 원소이다.
박영수 : 7은 집합 S 의 원소가 아니다.
임태수 : 9는 집합 S 의 원소이다.

2. 다음 보기에서 집합에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

보기

- ㉠ $n(\{0\}) = 1$
- ㉡ $\{1, 2\} \supset \{2, 1\}$
- ㉢ $\{1, 2, 3, \dots, 100\} \supset \{1, 100\}$
- ㉤ $n(\{2, 3, 5, 7\}) = n(\{0, \{\emptyset\}, \emptyset, \{0\}\})$
- ㉥ $n(\{1, 10, \{1, 10\}\}) = 4$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉥

해설

㉥ $n(\{1, 10, \{1, 10\}\}) = 3$

3. 두 집합
 $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{보다 작은 홀수}\}$,
 $B = \{a, 3, 5, 7, b\}$
에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고
 $B = \{a, 3, 5, 7, b\}$ 이므로
 $a = 1, b = 9$ 또는 $a = 9, b = 1$ 이므로
 $a + b = 10$

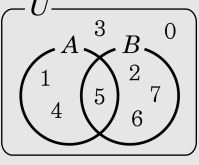
4. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{5\}$, $(A \cup B)^c = \{0, 3\}$, $A - B = \{1, 4\}$ 일 때, $n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$B - A = \{2, 6, 7\}$ 이므로 $n(B - A) = 3$

5. 다음 등식 중 옳은 것은?

① $(A - B)^c = A^c \cap B$

② $A \cap (A \cup B)^c = B^c$

③ $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cup C)$

④ $(A^c \cup B \cup C)^c = A \cap B^c \cap C^c$

⑤ $A - (B - C)^c = (A - B) - C^c$

해설

① $(A - B)^c = (A \cap B^c)^c$
 $= A^c \cup (B^c)^c$
 $= A^c \cup B$

② $A \cap (A \cup B)^c = A \cap (A^c \cap B^c)$
 $= (A \cap A^c) \cap B^c$
 $= \emptyset \cap B^c$
 $= \emptyset$

③ $(A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$
 $= A \cap (B^c \cup C^c)$
 $= A \cap (B \cap C)^c$
 $= A - (B \cap C)$

④ $(A^c \cup B \cup C)^c = (A^c)^c \cap B^c \cap C^c$
 $= A \cap B^c \cap C^c$

⑤ $A - (B - C)^c = A - (B \cap C^c)^c$
 $= A \cap \{(B \cap C^c)^c\}^c$
 $= A \cap (B \cap C^c)$
 $= A \cap B \cap C^c$

$(A - B) - C^c = (A \cap B^c) \cap (C^c)^c$
 $= (A \cap B^c) \cap C$
 $= A \cap B^c \cap C$

6. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A_4 \subset A_2$

② $A_4 \cup A_6 = A_{12}$

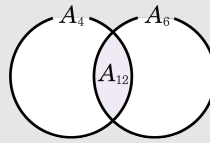
③ $A_2 \cap A_3 = A_6$

④ $(A_2 \cap A_3) \subset (A_3 \cup A_4)$

⑤ $A_3 \cap A_5 = A_{15}$

해설

$A_4 \cap A_6 = A_{12}$, $A_4 \cup A_6 \neq A_{12}$



7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 35$, $n(A \cup B)^c = 2$, $n(A^c) = 11$, $n(B) = 18$ 일 때, $n((A \cap B)^c)$ 을 구하면?

① 9

② 24

③ 26

④ 33

⑤ 35

해설

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 35 - 2 = 33$$

$$n(A) = n(U) - n(A^c) = 35 - 11 = 24$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 24 + 18 - n(A \cap B) \\ &= 33 \end{aligned}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 42 - 33 = 9$$

$$n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B) = 35 - 9 = 26$$

8. 석훈이네 아파트 한 동에는 전체 350 가구가 살고 있다. 이 중에서 우유를 배달시키는 집은 250 가구, 요구르트를 배달시키는 집은 160 가구, 우유나 요구르트를 배달시키는 집은 310 가구 일 때, 요구르트만 배달시키는 가구 수를 구하여라.

▶ 답 : 가구

▷ 정답 : 60 가구

해설

우유를 배달시키는 집의 집합을 A , 요구르트를 배달시키는 집의 집합을 B 라 하자.

$$n(U) = 350, \quad n(A) = 250, \quad n(B) = 160, \quad n(A \cup B) = 310$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$310 = 250 + 160 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 100$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 160 - 100 = 60$$

9. 다음 명제의 대우가 참인 것은?

- ① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
- ② x 가 3 의 배수이면 x 가 6 의 배수이다.
- ③ $x^2 > 1$ 이면 $x > 1$ 이다
- ④ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90^\circ$ 이다.
- ⑤ $a + b > 2$ 이면 $a > 1$ 또는 $b > 1$ 이다.

해설

⑤ 명제의 대우를 살펴보자.
 $a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다. 다음의 대우의 참, 거짓을 판별해보면 a 의 최댓값은 1, b 의 최댓값도 1 이므로 a, b 의 합의 최댓값은 2 이므로 대우는 참이 된다.

10. 다음 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것의 개수는?

- ㉠ $p : -1 < x \leq 1, q : |x| < 2$
- ㉡ $p : x + y$ 가 무리수, $q : x, y$ 가 무리수
- ㉢ $p : x + y$ 가 짝수, $q : x, y$ 는 짝수
- ㉤ $p : x^2 - x - 2 = 0, q : x = -1$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

- ㉠ $q : |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ 이고
 $\{x \mid -1 < x \leq 1\} \subset \{x \mid -2 < x < 2\}$ 이므로 p 는 q 이기 위한
충분조건이다.
- ㉡ $x = 2, y = \sqrt{3}$ 이면 $x + y$ 가 무리수이지만 x 는 무리수가
아니다. $\therefore p \not\Rightarrow q$
 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 x, y 는 무리수이지만 $x + y$ 는 무리수
가 아니다. $\therefore p \not\Leftarrow q$
따라서, p 와 q 는 아무 조건도 아니다.
- ㉢ $x = 3, y = 5$ 이면 $x + y$ 는 짝수이지만 x, y 는 홀수이다.
 $\therefore p \not\Rightarrow q$
 x, y 가 짝수이면 $x + y$ 도 짝수이다. $\therefore p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ㉤ $p : x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x - 2)(x + 1) = 0$ 이므로 $x = -1$
또는 $x = 2$ 이다.
 $\{x \mid x = -1 \text{ 또는 } x = 2\} \supset \{x \mid x = -1\}$ 이므로 p 는 q 이기
위한 필요조건이다.

11. a, b, c 가 실수일 때, p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

- ① $p : a^2 + b^2 = 0, q : a = b = 0$
- ② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수
- ③ $p : a = b, q : ac = bc$
- ④ $p : a - b = 0, q : a^2 - 1 = 0$
- ⑤ $p : ab > 0, q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

- ① 명제 자체도 성립하고 역도 성립하므로 필요충분조건이다.
- ② (반례) $a = 1, b = 1$ 인 경우
- ③ (반례) 역일 때, $c = 0$ 인 경우
- ④ (반례) 명제와 역 모두 성립하지 않는다.
- ⑤ (반례) 역일 때 $a = 0, b = 0$ 인 경우 $ab = 0$ 이므로 성립하지 않는다.

12. $a \geq 0, b \geq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 다음과 같은 과정으로 증명을 하였다. 이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것을 고르면?

증명

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a-b)^2}{2}$ 이므로
부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이 성립함을 알 수 있다.
이 때, 등호는 (다)일 때 성립한다.

- ① $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ② $\geq, a - b, a = b = 0$
- ③ $>, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a = b$
- ④ $>, a - b, a = b$
- ⑤ $\geq, \sqrt{a} - \sqrt{b}, a \geq b$

해설

$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{a}{2} - 2\sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}} + \frac{b}{2}$
 $= \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$
(가), (나)의 결과에서 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ 이므로
 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
(다) $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \geq 0$ 에서
등호가 성립할 때는 $\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}} = 0$ 일 때이므로
등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

13. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

I. $5 \in S, 7 \in S$
II. $p \in S, q \in S$ 이면 $p + q \in S$

- ① $5n \in S$

② $7n \in S$

③ $12n + 1 \in S$
- ④ $12n + 2 \in S$

⑤ $17n + 3 \in S$

해설

① $p = q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 2 \in S$
 $p = 5 \times 2, q = 5$ 이면 $p + q = 5 \times 3 \in S$
이와 같이 계속하면 $5n \in S$
② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$
③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면
 $S = \{5, 7, 10, 12, 14, \dots\}$ 이므로
 $13 \notin S \leftarrow 13 = 12 \times 1 + 1$
④ $12n + 2 = 5n + 7n + 7 - 5 = 5(n - 1) + 7(n + 1)$ 이므로
①, ②에 의해서 $12n + 2 \in S$
⑤ $17n + 3 = 10n + 7n + 10 - 7$
 $= 5(2n + 2) + 7(n - 1) \in S$

14. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 7 개

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 A 의 원소 중 짝수는 2, 4, 6 이므로 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중에서 $\emptyset$ 을 제외한 $2^3 - 1 = 7(\text{개})$ 이다.

15. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 5)\}$$

$$A \times C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$$

$$\text{따라서 } n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$$

16. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A - B) \cap X = A - B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A$ 이고 $(A - B) \cap X = A - B$ 이므로 $(A - B) \subset X$ 이다. $\therefore (A - B) \subset X \subset A$

$A - B = \{6, 8, 10\}$ 이므로 집합 X 는 6, 8, 10 을 반드시 포함하는 A 의 부분집합이다.

따라서 $2^{5-3} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

17. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 아닌 것은?

- ① $r \rightarrow p$
- ② $\sim p \rightarrow \sim q$
- ③ $\sim p \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참
 $R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \rightarrow p$ 가 참
 $Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \rightarrow p, r \rightarrow q$ 가 참이면 $\sim p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.

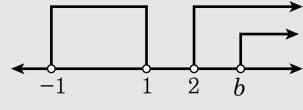
18. $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$ 은 필요조건이고 $x > b$ 는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

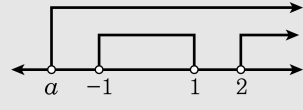
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$$\therefore b \geq 2$$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$$\therefore a \leq -1$$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1 , b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

19. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

20. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.
전체집합 $U = \{x|x \leq 60, x \text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $C = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$ 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

,

$$A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$$
$$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60\},$$
$$B = \{x|x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$$
$$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\},$$
$$C = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$$
$$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\},$$
$$(A \bullet B) \bullet C$$
$$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54, 56\} \bullet C$$
$$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$$
$$\therefore (A \bullet B) \bullet C \text{의 원소 중 가장 큰 값} = 54$$