

1. 다음 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 이 나타내는 원의 중심의 좌표를 (a, b) , 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a + b + r$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 을 정리하면

$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이다.

따라서 방정식 $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ 이 나타내는 원의 중심의 좌표는 $(-1, 4)$ 이고, 반지름의 길이는 5 이다.

$\therefore a + b + r = 8$

2. 점 (5, 1)과 (-1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$

② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$

④ $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 21$

⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 C(2, 4)

구하는 원의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{18}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

3. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$

그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

4. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

5. 직선 $y = -2x + a$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a 의 값은 ?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2, 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$$a = 2 \times 2 + 1 = 5$$

6. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x + \sqrt{2}y = 4$

② $x + \sqrt{3}y = 4$

③ $\sqrt{2}x + y = 4$

④ $\sqrt{3}x + y = 4$

⑤ $x - \sqrt{3} = 4$

해설

$(1, \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$$1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4$$

$$\therefore x + \sqrt{3}y = 4$$

7. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

- ① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$1x - 3y = 10$$

x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

8. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

9. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6, 2)$ 를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2

② 5

③ 7

④ 14

⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a, a + 3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2$$

이 원이 $(6, 2)$ 를 지나므로

$$(6 - a)^2 + (a + 1)^2 = (a + 3)^2 \text{ 에서}$$

$$(a - 2)(a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2, 14$$

원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

10. $x^2 + y^2 = 5$ 에 접하고, 기울기가 -2 이며, 제 1, 2, 4사분면을 지나는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -2x - \sqrt{5}$

② $y = -2x + 5$

③ $y = -2x - 3\sqrt{5}$

④ $y = -2x - 5$

⑤ $y = -2x - 5\sqrt{5}$

해설

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + c$ 라 하고, 직선과 원점간의 거리가 원의 반지름인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore c = \pm 5$$

제 1, 2, 4사분면을 지나야 하므로

$$\therefore c = 5 \quad \therefore y = -2x + 5$$

11. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$

② $-\frac{15}{8}$

③ $-\frac{7}{8}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$ax + by = 9$ 이고

이 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지나므로

$$6a + 6b = 9 \quad \therefore a + b = \frac{3}{2}$$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 9$$

이때, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ 에서

$$9 = \frac{9}{4} - 2ab \quad \therefore ab = -\frac{27}{8}$$

12. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$

④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$$

$$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$$

13. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

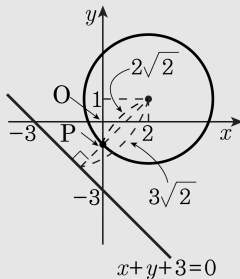
$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원위를 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x + y + 3 = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



14. 점(3, -1) 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $2x - y + 1 = 0$

② $y = -x + 2$ 또는 $4x + 7y - 1 = 0$

③ $y = -2x + 5$ 또는 $x - 2y - 5 = 0$

④ $y = 2x - 6$ 또는 $x + 5y - 4 = 0$

⑤ $y = -3x + 3$ 또는 $4x - 2y - 9 = 0$

해설

직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은(3, -1) 을 지나므로
 $y = mx - 3m - 1$

또한 이 직선은 원의 접선이므로 대입하면

$$x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 1 - 6m^2x + 6m - 2mx = 5$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(3m^2 + m)x + 9m^2 + 6m - 4 = 0$$

이 방정식이 중근을 가져야 하므로

$$(3m^2 + m)^2 - (m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 4) = 0$$

$$9m^4 + 6m^3 + m^2 - 9m^4 - 6m^3 + 4m^2 - 9m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$-4m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore (m + 2)(2m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } \frac{1}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = -2x + 5 \text{ 또는 } x - 2y - 5 = 0$$

15. 다음 <보기> 중에서 점 (2, 1) 을 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식을 모두 고르면?

보기

㉠ $x = 2$

㉡ $y = 1$

㉢ $3x + 4y + 5 = 0$

㉣ $4x - 3y - 5 = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $x = 2$ 에서 점 (2, 1)만 지나고 원에 접하지 않는다. (×)

㉡ $y = 1$ (○)

㉢ $3x + 4y + 5 = 0$ 은 (2, 1)을 지나지 않는다. (×)

㉣ $4x - 3y - 5 = 0$ 은 (2, 1)을 지나고 거리가 $\frac{|-5|}{\sqrt{25}} = 1$ 이므로 접한다. (○)

