1. 두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+1$ ② $y=x-1$ ③ $y=-x+1$
④ $y=-x-1$ ⑤ $y=x$

해설

기울기가 m 이고, 점$(x_1,\ y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$
두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가
$\frac{1-(-3)}{2-(-2)}=1$ 이므로,
구하는 직선의 방정식은
$y-1=1\cdot(x-2)$
$\therefore\ y=x-1$

2. 점 $(2,\ -1)$ 을 지나고 직선 $y = 2x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ ② $y = 2x - 5$ ③ $y = -2x - 5$
④ $y = 2x + 2$ ⑤ $y = -2x + 5$

해설
$y = 2x + 4$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y - (-1) = 2(x - 2)$
$\therefore\ y = 2x - 5$

3. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

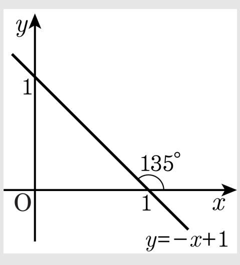
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

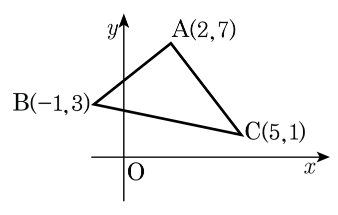
▷ 정답 : x 축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



4. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 다음 중 두 점 A, G 를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G 를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A 와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점(2, 7) 과(2, 2) 를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

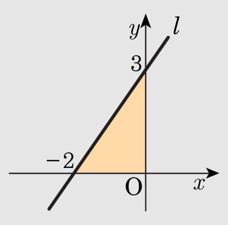
5. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

6. 세 점 $A(-2,9)$, $B(3,-1)$, $C(5,a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -6 ② -5 ③ 2 ④ 9 ⑤ 13

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 기울기가 같다.

$\overline{AB}$의 기울기는 $\frac{9-(-1)}{-2-3}=-2$이고

$\overline{BC}$의 기울기는 $\frac{a-(-1)}{5-3}$이다.

$\therefore\ a=-5$

7. 세 점 A(2, 3), B(−1, 9), C(−4, a) 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{3-9}{2-(-1)} = -2$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 : $\dfrac{a-3}{(-4)-(2)}$ $\therefore\ a = 15$

8. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

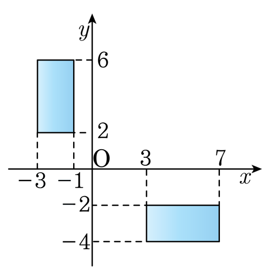
$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

9. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$　　② -1　　③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$　　⑤ $-\frac{1}{2}$

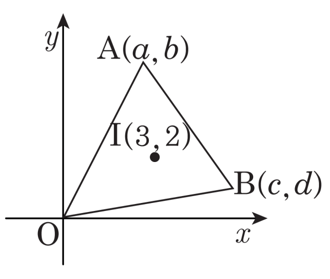
해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$ 이므로

직선 AB 의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$

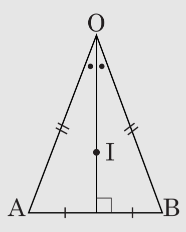
10. 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d) 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 (3, 2) 이다. $\overline{OA}=\overline{OB}$ 일 때, $\dfrac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{2}$　⑤ 알 수 없다

해설

$\triangle$OAB 가 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이고,
$\angle AOI=\angle BOI$ 이므로
$\overline{OI}$ 는 $\overline{AB}$ 와 수직이다.
$\overline{OI}$ 의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로
$\overline{AB}$ 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.



$\therefore \dfrac{b-d}{a-c}=-\dfrac{3}{2}$
$\therefore 3a+2b=3c+2d$
$\therefore \dfrac{3c+2d}{3a+2b}=1$

11. 두 직선 $ax+by+c=0,\ cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$　② $2x+y=5$　③ $2x-y=3$
④ $x+2y=5$　⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\cdots$ ㉠

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{c}{a},\ -\frac{c}{b}=-\frac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\frac{a^2}{b},\ c=\frac{b^2}{a}$

$\therefore \frac{a^2}{b}=\frac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2\neq 0\ )$

$\therefore c=\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ $: x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

12. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ 의 교점과 점 $(2,-1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$ 을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

13. 두 직선 $x+y=1,\ ax+2y+a+2=0$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 정수 a 값의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+y=1 \cdots ㉠$

$ax+2y+a+2=0 \cdots ㉡$

$㉡-㉠\times 2\ :\ (a-2)x+a+4=0$

$\Rightarrow\quad x=\dfrac{a+4}{2-a}$

$\Rightarrow y=1-x=\dfrac{2a+2}{a-2}$

$\therefore$ 교점 : $\left(\dfrac{a+4}{2-a},\ \dfrac{2a+2}{a-2}\right)$

교점이 제 1 사분면에 있으므로

$\dfrac{a+4}{2-a}>0,\ \dfrac{2a+2}{a-2}>0$

두 식의 양변에$(a-2)^2$ 을 곱하면

$(a-2)(a+4)<0,\ 2(a+1)(a-2)>0$

$\Rightarrow -4<a<2,\ a<-1\ or\ a>2$

$\therefore\ -4<a<-1$

$\therefore$ 정수인 a 의 개수는 $-3, -2$ 즉 2개

14. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$ ② $(1, 1)$ ③ $(0, 1)$
④ $(-1, 0)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

15. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$

$\therefore 2x - y - 5 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

16. 원점을 지나고, 점 (2, 1) 에서의 거리가 1 인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$　② $y = -\frac{2}{3}x$　③ $y = \frac{1}{3}x$
④ $y = -\frac{4}{3}x$　⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y = kx(k \neq 0)$ 이라 하면,
(2, 1) 에서의 거리가 1 이므로
$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, $|2k-1| = \sqrt{k^2+1}$, $k(3k-4) = 0$
$k = \frac{4}{3}$ ($\because k \neq 0$)
$\therefore\ y = \frac{4}{3}x$

17. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$　④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서
$(k+1)x+(k-1)y-3=0$
원점에서 이 직선까지의 거리

$$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때
최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은
$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

18. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0)$, $(2,6)$, $(6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2\cdot3-6\cdot6| = 15$

19. $\mathrm{A}(0,-2), \mathrm{B}(3,3), \mathrm{C}(4,0)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(4-3)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10}$

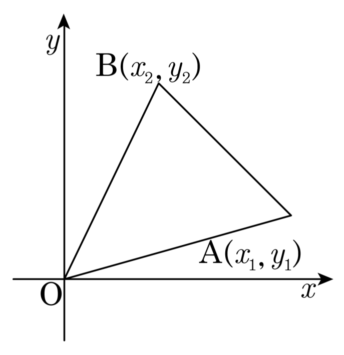
또, 직선 BC 의 방정식은 $3x+y-12=0$ 이므로

$\mathrm{A}(0,-2)$ 로부터 직선 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{10}}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{AH}} = 7$

20. 원점 $O(0,\ 0)$와 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 $B(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$이다.

$\therefore\ \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

21. 복소수 $z = a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i \cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b = 3a$

$\therefore\ b = \frac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.