1. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore\ k = 0$

이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a = 1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 2$

2. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은

$y=m(x-1)+2$ 에서,

$mx-y-m+2=0 \cdots$ ㉠

여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면, $m=\dfrac{3}{4}$

㉠에 대입하여 정리하면, $\dfrac{3}{4}x-y+\dfrac{5}{4}=0$,

$3x-4y+5=0$

$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

3. 좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 6) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 할 때, 점 G 와 직선 OA 사이의 거리는?

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

해설

삼각형 OAB 의 무게중심은 G(2,3) , 직선 OA 의 방정식은

$y = \frac{3}{4}x$ 곧 $3x - 4y = 0$ 이다.

따라서 점 G 와 직선 OA 의 거리 d 는

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$$

4. 이차함수 $y = 3x^2 + 18x + 35$ 의 꼭지점에서 직선 $4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y = 3x^2 + 18x + 35$

$\Rightarrow \quad y = 3(x+3)^2 + 8$

$\Rightarrow$ 꼭지점: $(-3, 8)$

$4x + 3y + 8 = 0$ 까지의 거리를 구하면,

$$\frac{|4 \times (-3) + 3 \times 8 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

5. 두 직선 $3x-4y+1=0, 3x-4y-4=0$사이의 거리를 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

두 직선이 평행하므로,
두 직선 중 한 직선의 임의의 점을 택한 후
나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x-4y+1=0$의 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 점과

직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\therefore \frac{\left|3\times 0+(-4)\times\frac{1}{4}-4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

6. 서로 평행한 두 직선 $3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

서로 평행한 두 직선
$3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는
직선 $3x-y+5=0$ 위의 점 $(0,5)$ 와
직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
구하는 거리는

$$\frac{|0-5-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

7. 원점 O 에서 직선 $ax-y+4=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 한다. 선분 OH 의 길이가 2 가 될 때, a^2 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

선분 OH 는 원점과 직선 $ax-y+4=0$ 간의 최단거리이므로,

$$\frac{|4|}{\sqrt{a^2+1}} = \overline{OH} = 2$$

$$\sqrt{a^2+1} = 2$$

$$a^2+1 = 4$$

$$\therefore\ a^2 = 3$$

8. 직선 $3x-4y=0$ 과 평행이고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

① $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ ② $\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ ③ $(0,\ 1)$

④ $\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0,\ 3)$

해설

직선 $3x-4y=0$ 과 평행한 직선을

$3x-4y+k=0$ 이라 놓으면,

$$\frac{|3\times 2-4\times 1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$\therefore\ |2+k|=5,\ k=3$ ($\because$ y 절편>0)

$\therefore$ 직선 $3x-4y+3=0$ 의 y 절편은$\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$

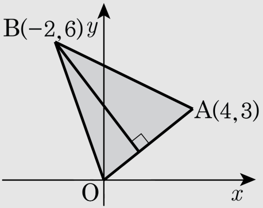
9. 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 3)$, $B(-2,\ 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9　② 10　③ 12　④ 15　⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의

방정식은 $y = \dfrac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과

직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(-2) - 4\times 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$

10. 세 꼭지점이 $A(1,\ 2)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ 0)$ 로 주어지는 삼각형 ABC 의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리를 구하여 높이로 하고, $\overline{BC}$ 의 길이를 밑변의 길이로 하여 삼각형 의 넓이를 구한다. 직선 BC 의
방정식은 $2x-y+4=0$ 이므로,
점 $A\ (1\ ,2\ )$ 에서 직선 BC 에 이르는 거리는
$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.
변 BC 의 길이 : $\sqrt{5}$

$$\therefore\ \triangle ABC = \sqrt{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}=2$$

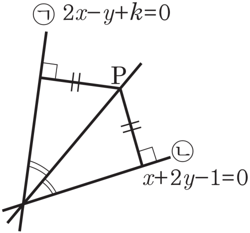
$$\therefore\ \triangle ABC = 2$$

해설

세꼭지점이 주어질 때 넓이는

$$S=\frac{1}{2}|(1\times 2)+(-1\times 0)+(-2\times 2)-$$
$$(-1\times 2)+(-2\times 2)+(1\times 0)|=2$$

11. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 P(3, 1)을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6
④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots ㉠$

$x+2y-1=0 \quad \cdots ㉡$

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k| = 4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

12. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

P$(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

13. y축 위의 한 점 P 로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1, -2)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(0, 2)$

④ $(0, 1)$ ⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 P $(0, y)$ 라 하면 직선

$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

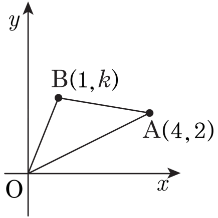
$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$-8y = -8 \therefore y = 1$

$\therefore P(0, 1)$

14. 다음 그림과 같이 $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(1,k)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.
점 $B(1,k)$ 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리

h 는 $h=\dfrac{|1\times1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{OA}=2\sqrt{5}$

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$

$\therefore\ k=\dfrac{5}{2}\ (\because k>0)$

15. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, $y = \pm\frac{4x - 3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$