1. $A = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$ ② 1 ③ 0 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$A = \frac{1-i}{1+i} = -i$

$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots + A^{2005}$

$= 1 + \{(-i) + (-1) + i + 1\} + \cdots + (-i)$

$= 1 - i$

2. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5　　② 7　　③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12　　⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,
$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로
$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

3. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족하는 복소수 z의 개수는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수) 이므로 주어진 식에 대입하면

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore\ 2a-3b=1$

따라서 $2a-3b=1$을 만족하는 $a,\ b$는 무수히 많고, $z=a+bi$ 이므로 문제의 조건을 만족하는 z가 무수히 많음을 알 수 있다.

4. 실수 x 에 대하여, $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ 이 성립할 때, $|x+1| + |x-2|$ 의 값을 구하면? (단, $(x+1)(x-2) \neq 0$)

① $2x-1$ ② $-2x+1$ ③ 3

④ -3 ⑤ $x+1$

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 을 만족하려면,

$a < 0,\ \ b \geq 0$ 이다.

따라서 $x+1 \geq 0,\ x-2 < 0,\ -1 \leq x < 2,\ x \neq -1,\ x \neq 2$

$\therefore\ -1 < x < 2$

$\therefore |x+1| + |x-2| = x+1-x+2 = 3$

5. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 근이므로
$x = 1$을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

6. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

7. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.
$D' = 1^2-(k-3)>0$
$\therefore\ k<4$
$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

8. 이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha+\beta=3$	㉡ $\alpha^2+\beta^2=6$
㉢ $\alpha\beta=-3$	㉣ $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=2$
㉤ $(\alpha-1)(\beta-1)=\dfrac{1}{2}$	

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

㉠ $\alpha+\beta=3$ (○)

㉡ $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2\cdot\dfrac{3}{2}=6$ (○)

㉢ $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}\neq-3$ (×)

㉣ $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9-4\cdot\dfrac{3}{2}=3\quad|\alpha-\beta|=\sqrt{3}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\neq2$ (×)

㉤ $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\dfrac{3}{2}-3+1=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$ (×)

9. x의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$의 두 실근의 비가 $1 : 2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$ ② $q > \frac{1}{2}$ ③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$ ⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \ \alpha = p$
$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \ \alpha^2 = 2q - 1$
따라서 $p^2 = 2q - 1$
한편 $\mathrm{D} > 0$에서 $9p^2 - 4(4q - 2) > 0$
$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$
$2q - 1 > 0$
$\therefore \ q > \frac{1}{2}$

10. 이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근을 $\frac{1}{(1+i)^2}$이라 할 때, $f(2x+3)=0$의 두 근의 합은? (단, a,b,c는 실수)

① -5　② -3　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{1+2i-1}=\frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}i$

$f(x)=ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-\frac{1}{2}i$이면

a,b,c가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{1}{2}i$

$\therefore\ f(x)=0$의 두 근의 합은 0

$f(2x+3)=0$의 두 근을 α,β라 하자.

$(2\alpha+3)+(2\beta+3)=0$

$2(\alpha+\beta)=-6$

$\therefore\ \alpha+\beta=-3$

11. 이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$보다 항상 위쪽에 있을 때, a의 범위는?

① $0 < a < \frac{4}{9}$
② $\frac{1}{3} < a < 1$
③ $0 \leq a < 1$
④ $a < 0$ 또는 $a > \frac{4}{9}$
⑤ $a < \frac{1}{3}$ 또는 $a < 1$

해설

이차함수 $y = x^2 + 6ax + 1$의 그래프가 직선 $y = 2x + 2a$보다 항상 위쪽에 있으려면

$y = x^2 + 6ax + 1 - (2x + 2a)$의 판별식 $D/4 < 0$야 하므로

$(3a - 1)^2 - 1 + 2a < 0$

$9a^2 - 4a < 0$

$a(9a - 4) < 0$

$0 < a < \frac{4}{9}$

12. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a-5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -\frac{a-5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로
$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-\frac{a-5}{2} = 6$
$\therefore a = -7$
또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x+b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b$ $\therefore$ $b = 2$
$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

13. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k,\ y = k^2 + k + 2$
② $x = k,\ y = k^2 - 3k + 4$
③ $x = 2k,\ y = k^2 + 4k + 1$
④ $x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$
⑤ $x = 3k,\ y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
$= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$

14. $2x+y=a+2,\ \ x+2y=8(a+2)$ 를 만족하는 $x,\ y$ 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

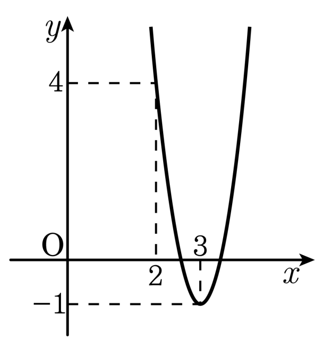
해설

$2x+y=a+2\cdots$ ①
$x+2y=8(a+2)\cdots$ ②
$2\times$ ① $-$ ② 을 하면
$3x=-6a-12,\ \ x=-2a-4$
$x=-2a-4$ 를 ①에 대입하면
$y=5a+10$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (-2a-4)^2+(5a+10)^2 \\ &= 4a^2+16a+16+25a^2+100a+100 \\ &= 29a^2+116a+116 \\ &= 29(a+2)^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 0

15. 다음 그림은 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프이다. apq 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -15

해설

꼭짓점 좌표가 $(3,\ -1)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 1$
$y = a(x-3)^2 - 1$ 의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로
$4 = a - 1 \qquad \therefore\ a = 5$
$y = 5(x-3)^2 - 1$
$\therefore\ a = 5,\ p = 3,\ q = -1$
$\therefore\ apq = 5 \times 3 \times (-1) = -15$

16. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

17. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

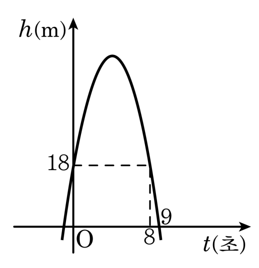
$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$에서 $a^2\geq 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= (-2a)^2-2(9-2a^2)\\ &= 4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

$\therefore a^2+\beta^2\geq 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

18. 다음은 지면으로부터 18m 의 높이에서 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이 hm 를 그래프로 나타낸 것이다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.



▶ 답: ＿＿＿＿ 초

▶ 답: ＿＿＿＿ m

▷ 정답: 4 초

▷ 정답: 50 m

해설

이차함수의 식을 $h = at^2 + bt + c$ 로 놓고 세 점 $(0,\ 18)$, $(8,\ 18)$, $(9,\ 0)$ 의 좌표를 각각 대입하면

$18 = c$, $18 = 64a + 8b + c$, $0 = 81a + 9b + c$ 이므로 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 16$, $c = 18$ 이다.

즉, $h = -2t^2 + 16t + 18 = -2(t-4)^2 + 50$

따라서 $t = 4$ 일 때, h 는 최댓값 50 을 갖는다.

19. 사차방정식 $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$　② $\sqrt{2}i$　③ -2
④ -1　⑤ 1

해설

(준식)$=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$
실근의 합은 $1+(-1)=0$
허근의 합은 -2
모든 근의 합은 -2

20. $x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 + 2x^3 + (a-1)x^2 - 2x - a = 0$에서 $x = 1, x = -1$일 때 성립하므로

인수정리와 조립제법을 이용하면

(좌변) $= (x-1)(x+1)(x^2+2x+a) = 0$

따라서 모두 실근이 되려면

$x^2 + 2x + a = 0$의 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$1^2 - 1 \cdot a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

21. 다음과 같은 식의 변형을 이용하여 알 수 있는 것은? (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수를 나타낸다.)

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d} = \overline{az}^3 + \overline{bz}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$$
$$= \overline{az}^3 + \overline{b}\overline{z}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$$
$$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$$

① z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

② z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, $\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

③ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근과 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근은 같다.

④ $\overline{z}$ 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

⑤ $\overline{z}$ 가 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이면, z 는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이다.

해설

z 가 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 근이면,
$az^3+bz^2+cz+d=0$
$\overline{ax^3+bz^2+cz+d}$
$= \overline{az}^3 + \overline{bz}^2 + \overline{cz} + \overline{d}$
$= \overline{a}(\overline{z})^3 + \overline{b}(\overline{z})^2 + \overline{c}(\overline{z}) + \overline{d}$
$= 0$ 이므로
$\overline{z}$ 는 $\overline{a}x^3+\overline{b}x^2+\overline{c}x+\overline{d}=0$ 의 근이다.

22. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, $\dfrac{w^{102} + w^{101}}{w^{100}} + \dfrac{w^{99}}{w^{101} + w^{100}}$을 계산하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^2 + \omega = -1$

$\dfrac{\omega^{102} + \omega^{101}}{\omega^{100}} + \dfrac{\omega^{99}}{\omega^{101} + \omega^{100}}$

$= \dfrac{\omega^2 + \omega}{1} + \dfrac{1}{\omega^2 + \omega}$

$= -1 - 1 = -2$

23. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

24. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$㉠

$t^2+at+1=0\cdots$㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

25. A, B, C, D 네 명이 서로 네 번씩 바둑을 두어 각 대국의 결과마다 승자에게 2점, 패자에게 0점, 무승부일 때는 두 명 모두에게 1점씩을 준다. 대국의 결과가 다음 표와 같을 때, D가 얻은 점수를 구하면?

	승	무	패	점수
A	6	1	5	13
B	5	3	4	13
C	8	2	2	18
D	?	?	?	x

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

D가 a승 b무 c패를 했다고 하면
$a+b+c=4\cdot3=12$ ⋯⋯㉠
네 명이 모두 승수와 패수가 같아야 하므로
$6+5+8+a=5+4+2+c$
$\therefore\ c=a+8$ ⋯⋯㉡
또, 무승부의 합은 항상 짝수이므로 b는 짝수이어야 한다.
㉠, ㉡에서 $2a+b=4$이고
$b=0$일 때 $a=2$, $b=2$일 때 $a=1$,
$b=4$일 때 $a=0$이므로
어느 경우에나 D가 얻은 점수는 4점이다.