1. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2-3x+2=a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$가 항상 성립할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, a, b, c, d는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x=0$을 대입하면 $a=2$
$x=1$을 대입하면 $b=-2$
$x=2$을 대입하면 $c=1$
3차항은 없으므로 $d=0$
$\therefore\ a+b+c+d=1$

2. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i}+\frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$$=\frac{(1-2i)(2-3i)+(1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$=\frac{(2-6)+(-4-3)i+(2-6)+(4+3)i}{2^2+3^2}$$

$$=\frac{(-4-7i)+(-4+7i)}{13}$$

$$=-\frac{8}{13}$$

3. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$$\frac{D}{4}=2^2-k<0$$

$\therefore\ k>4$

4. $1 \le x \le 8,\ 2 \le y \le 5$일 때, $x-y$의 값의 범위는?

① $-9 \le x-y \le 10$

② $-4 \le x-y \le 6$

③ $-3 \le x-y \le 4$

④ $2 \le x-y \le 40$

⑤ $3 \le x-y \le 13$

해설

$1-5 \le x-y \le 8-2$

5. 다음 연립부등식의 해 중 자연수의 개수가 가장 많은 연립부등식을 고르면?

① $\begin{cases} x \le 1 \\ x > -1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x \le 1 \\ x \le 3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \le -1 \\ x > -5 \end{cases}$

해설

① $-1 < x \le 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
② $2 < x < 3$ 이므로 자연수는 없다.
③ $x \le 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
④ $x > 4$ 이므로 자연수는 5, 6, 7, 8$\cdots$ 이다.
⑤ $-5 < x \le -1$ 이므로 자연수는 없다.

6. B(4, 2), C(0, 5) 인 △ABC 의 무게중심의 좌표가 (1, 1) 일 때, 꼭짓점 A 의 좌표를 구하면?

① A(−2, −3) ② A(−2, −4) ③ A(−1, −4)

④ A(−1, −3) ⑤ A(−1, 4)

해설

A(x, y)라 하면

$$\frac{x+4+0}{3}=1, \quad \frac{y+2+5}{3}=1$$

$\therefore x=-1,\ y=-4$

7. 좌표평면 위의 점 $(-2,\ 3)$ 을 x 축 방향으로 3 , y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동 시키면 점 $(a,\ b)$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(x, y) \rightarrow (x+3, y-1)$

$\therefore (-2, 3) \rightarrow (1, 2)$

8. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축의 방향으로 p , y 축의 방향으로 $-2p$ 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = 2x - 5$ 와 일치하였다. 이때, 상수 p 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선을 x 축으로 p , y 축으로 $-2p$만큼 평행이동하면,

$\Rightarrow \quad y + 2p = 2(x - p) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 4p + 3$

$\Rightarrow \quad -4p + 3 = -5$

$\therefore \ p = 2$

9. x^3-2x^2+a 가 $x+3$ 로 나누어 떨어지도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 45$

해설

$$f(-3)=(-3)^3-2(-3)^2+a=a-45=0$$

$\therefore \ a=45$

10. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -2 \\ x < 4 \end{cases}$$

따라서 $-2 < x < 4$ 이므로 연립방정식을 만족하는 정수는 -1, 0, 1, 2, 3 으로 5 개 이다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2<10 \\ 2x-5>1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$$\begin{aligned} 4x-2 &< 10 \\ 4x &< 12 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x-5 &> 1 \\ 2x &> 6 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

따라서 동시에 만족하는 정수 x 는 없다.

13. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$　② $-2 < k < 0$

③ $0 \leq x \leq 2$　④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는$k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k-2) < 0$$

$\therefore 0 < k < 2$

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

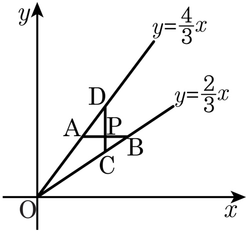
① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a \le -4$이다.

15. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자.

이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$

② $\frac{8}{9}$

③ $\frac{9}{8}$

④ $\frac{9}{2}$

⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

16. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2+y^2+ax-2y=0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1,1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y=0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=$

$\dfrac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\dfrac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

17. 직선 $x+2y-3=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은?

① $x+2y-5=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x+2y-2=0$

④ $x+2y-1=0$ ⑤ $x+2y+1=0$

해설

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼
평행이동하므로
$(x-2)+2(y+3)-3=0$으로 이동한다.

18. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 할 때 $f(x)$를 $\frac{g(x)}{n}$로 나눈 몫과 나머지를 나타낸 것은?

① 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $R(x)$
② 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $R(x)$
③ 몫 : $\frac{Q(x)}{n}$, 나머지 $\frac{R(x)}{n}$
④ 몫 : $Q(x)$, 나머지 $\frac{R(x)}{x}$
⑤ 몫 : $nQ(x)$, 나머지 $nR(x)$

해설

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \cdots ㉠$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{n}Q'(x) + R'(x) \cdots ㉡$$

㉠ 에서 $f(x) = nQ(x)\dfrac{g(x)}{n} + R(x)$,

$$\frac{Q'(x)}{n} = Q(x),\ R'(x) = R(x)$$

$$\therefore\ Q'(x) = n \cdot Q(x),\ R'(x) = R(x)$$

19. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b=c$인 이등변 삼각형

② $a=c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)\\ &= (a+b)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0\end{aligned}$$

$a^2+b^2=c^2$ $(\because\ a+b\neq 0)$

$\therefore$ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

20. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 9$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하였더니 최솟값이 -1 이 되었다. m 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ -8 ⑤ 3

해설

$y = 2x^2 - 4x + 9 = 2(x-1)^2 + 7$

이 그래프를 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면

$y = 2(x-1)^2 + 7 + m$

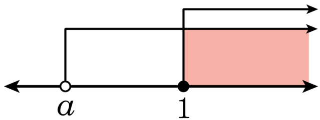
최솟값이 -1 이므로 $7 + m = -1$

$\therefore m = -8$

21. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} 0.1x - 0.2 \geq 0.3 - 0.4x \\ -0.3 + 0.3x > -0.4x - 2.4 \end{cases}$$

의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같을 때, a 의 값은?



① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} 0.1x - 0.2 \geq 0.3 - 0.4x \\ -0.3 + 0.3x > -0.4x - 2.4 \end{cases}$$

$x + 4x \geq 3 + 2$

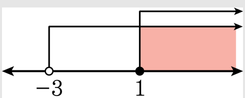
$5x \geq 5$

$x \geq 1$

$3x + 4x > -24 + 3$

$7x > -21$

$x > -3$



$\therefore a = -3$

22. 연립부등식 $\begin{cases} 7x-4>-3(x-2) \\ 8(x+1)>2x-a \end{cases}$ 의 해가 $x>1$ 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a\le -2$ ③ $a\ge -14$

④ $a>-14$ ⑤ $a\le -14$

해설

(i) $7x-4>-3(x-2)$, $x>1$

(ii) $8(x+1)>2x-a$, $x>\dfrac{-a-8}{6}$

연립부등식의 해가 $x>1$ 이므로

$\dfrac{-(a+8)}{6}\le 1$, $-a-8\le 6$

$\therefore\ a\ge -14$

23. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$

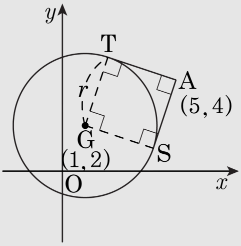
24. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(5,4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

좌표평면 그림으로 나타내면 점 A에서 그은 접선이 서로 수직이므로 원의 중심 G, 접점 S와 T, 점 A로 이루어지는 □GSAT는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.

$$\therefore\ r=\frac{\overline{\mathrm{GA}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{10}$$



해설

중심을 C라 하고 두 접점을 각각 T, T′이라고 하면 점 C의 좌표는 $(1,2)$이므로

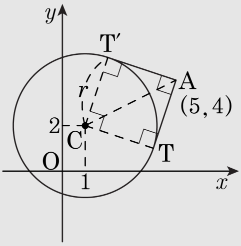
$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

점 A 에서 원에 두 접선을 그었으므로 $\overline{\mathrm{AT}}=\overline{\mathrm{AT'}}$

사각형 T′CTA는 네 각의 크기가 같고 네 변의 길이가 같은 정사각형이므로 $\angle\mathrm{CAT}=45°$

직각삼각형 CAT 에서 $\overline{\mathrm{CT}}=r$이므로

$$r=\overline{\mathrm{CA}}\sin 45°=2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$$



25. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하면 $\mathrm{A'}(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$