1. 두 점 A $(-1, 1)$, B $(1, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(3, 0)$ ② $(5, 0)$ ③ $(0, 3)$ ④ $(0, 5)$ ⑤ $(0, 7)$

해설

y 축 위의 점을 $(0, a)$ 라 하면
$\therefore 1^2 + (a-1)^2 = 1^2 + (a-5)^2$ 정리하면
$a = 3$

2. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(2), \mathrm{B}(6)$을 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{P}(p),\ Q(q)$라 하면

$$p = \frac{3 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{3 + 1} = \frac{20}{4} = 5$$

$$q = \frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot 2}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = |8 - 5| = 3$$

3. A(a, 8), B(b, a), C(5, b) 인 $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(a, 3) 일 때, 선분 BG 의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{34}$

해설

$\dfrac{a+b+5}{3} = a$, $\dfrac{8+a+b}{3} = 3$

$\therefore a = 2$, $b = -1$

따라서 $\overline{\mathrm{BG}} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

4. 좌표평면 위의 점$(2,\ 3)$을 지나는 직선 l 이 두 점 $A(-4,\ 1)$, $B(2,\ -2)$를 잇는 선분AB 를 $1\ :\ 2$ 로 내분할 때, 직선 l의 y절편은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

해설

선분 $\overline{AB}$를 $1\ :\ 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot 2+2\cdot(-4)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-2)+2\cdot 1}{1+2}\right)$$

$\therefore\ (-2,\ 0)$

직선 l은 두 점 $(2,\ 3)$, $(-2, 0)$을 지나므로

그 방정식은 $y=\frac{3}{4}(x+2)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

따라서 y 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다.

5. x절편이 3이고 y절편이 2인 직선의 방정식은?

① $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ② $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ ③ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$
④ $y=2x+1$ ⑤ $y=3x+2$

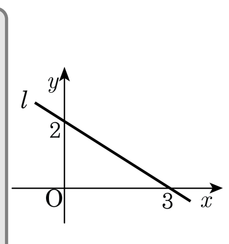
해설

기울기$=\ \frac{2}{3}$

$y=-\frac{2}{3}x+2$

$\frac{2}{3}x+y=2$

$\therefore\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$



6. 점 $(4,\ 3)$과 직선 $5x-12y+3=0$ 사이의 거리를 d_1, 점 $(4,\ 3)$과 직선 $12x+5y-50=0$ 사이의 거리를 d_2라고 할 때, d_1과 d_2 사이의 관계는?

① $d_1=d_2$　② $d_1=d_2+1$　③ $d_1+1=d_2$
④ $d_1=d_2+2$　⑤ $d_1+2=d_2$

해설

$$d_1=\frac{|5\cdot4-12\cdot3+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-13|}{\sqrt{169}}=1$$

$$d_2=\frac{|12\cdot4+5\cdot3-50|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{169}}=1$$

따라서 $d_1=d_2$

7. 두 원 $x^2+y^2=9, (x-4)^2+(y-3)^2=4$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

A : $x^2+y^2=9$
중심 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이 3
B : $(x-4)^2+(y-3)^2=4$
중심 $(4,\ 3)$, 반지름의 길이 2
두 원의 중심 사이의 거리를 구하면, $\sqrt{4^2+3^2}=5$
$\therefore$ 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과
같다. $\Rightarrow$ 두 원은 외접한다, 교점의 개수 1 개

8. 직선 $y=2x+1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 y 절편은?

① -4 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선 $y=2x+1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y+1=2(x-2)+1$,

$y=2x-4$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 -4 이다.

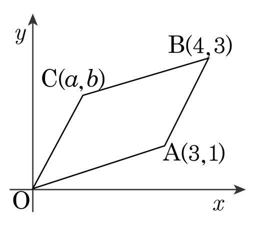
9. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2\cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a,3)$, $\mathrm{B}(-1,-5)$, $\mathrm{C}(3,7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=(-1-a)^2+(-5-3)^2=a^2+2a+65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2=(a-3)^2+(3-7)^2=a^2-6a+25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2=(3+1)^2+(7+5)^2=160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2-4a+90=160$
$\therefore\ a^2-2a-35=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

10. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore a+b=3$

11. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.
이 때, $(0,\ 0)$을 지나므로
$(-3)+k(-3)=0 \quad \therefore\ k=-1$
$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$을 정리하면
$\therefore\ x-2y=0$
$a=1,\ b=-2 \quad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

12. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0)$, $(2,6)$, $(6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$

13. 원 $x^2+y^2-2y-3=0$과 중심이 같고, 점 (1, 1)을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2y=0$
② $x^2+y^2-2x+1=0$
③ $x^2+y^2-2y-1=0$
④ $x^2+y^2-2x+3=0$
⑤ $x^2+y^2-2y+1=0$

해설

$x^2+y^2-2y-3=0$과 중심이 같은 원의 방정식은
$x^2+y^2-2y+k=0$ 의 꼴이다.
또, 점 $(1,1)$을 지나므로
$1+1-2+k=0 \quad \therefore k=0$
따라서, 구하는 방정식은 $x^2+y^2-2y=0$

14. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10　② 8　③ 6　④ 5　⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2,\ b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

15. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

16. 직선 $y=2x$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 와 대칭인 점을 Q 라 한다. Q 를 x 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 R 라고 하면, R과 P 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이 된다고 한다. 이 때, $2a-4b$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

R과 $\mathrm{P}(a,b)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{R}(b,a)$ 이고
Q 는 R 을 x 축으로 -1 만큼 이동한 것이므로 $\mathrm{Q}(b-1,a)$ 이다.
또, P 와 Q 는 $y=2x$ 에 대하여 대칭이므로
$\left(\frac{a+b-1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ 는 $y=2x$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{PQ}}$와 $y=2x$는 수직이다. $\therefore$ (선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$=\frac{b-a}{a-b+1}=-\frac{1}{2}\cdots$① 이고,
$\frac{a+b}{2}=2\left(\frac{a+b-1}{2}\right)\cdots$②
①에서 $a-b=1$
②에서 $a+b=2$
$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$, $2a-4b=3-2=1$

17. 직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 다음, 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y-5=0$ ② $2x-4y-9=0$

③ $3x-2y-40=0$ ④ $2x-y-21=0$

⑤ $6x-3y-29=0$

해설

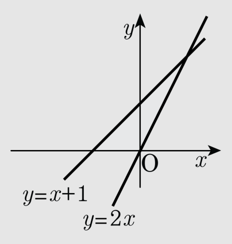
직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(8-x)-3(-6-y)+6=0$
즉, $2x-3y-40=0$
이것을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(-y)-3(-x)-40=0$
$\therefore 3x-2y-40=0$

18. 기울기가 각각 1, 2 인 두 직선이 한 점 (1, 2) 에서 만날 때, 두 직선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기울기가 1, 2 인 두 직선은 $y = x + a$, $y = 2x + b$ 로 놓을 수 있고,
이 두 직선이 (1, 2) 를 지나므로 $a = 1$, $b = 0$
따라서 두 직선은 다음 그림과 같고 넓이 S 는
$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$



19. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

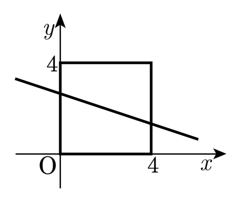
해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$\therefore \quad \dfrac{-3-1}{-2-1} = \dfrac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$

$\Rightarrow \quad \therefore \ k = 4$

20. 직선의 방정식 $ax+2y-5=0$이 다음 그림과 같이 정사각형의 넓이를 이등분 할 때, a의 값은 얼마인가?



① 2 ② −1 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 직선이 정사각형의 넓이를 이등분하려면 정사각형 대각선의 교점인 중심 $(2,2)$를 지나야 한다.

$ax+2y-5=0$에서 $2a+4-5=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

21. 직선 $(2+k)x+(1-2k)y-3(k+2)=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P을 지난다. 점 P의 좌표는?

① P(3, 0) ② P(0, 3) ③ P(−3, 0)
④ P(0, −3) ⑤ P(−3, 3)

해설

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은
k의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지난다.
주어진 직선을 k에 관해서 정리하면
$2x+y-6+k(x-2y-3)=0$
이것이 k에 값에 관계없이 성립해야 하므로
$2x+y-6=0,\ x-2y-3=0$
이것을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=0$
따라서 주어진 직선은 실수k의 값에 관계없이 점 P(3, 0)을 지난다.

22. 두 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, $(x-5)^2+(y-7)^2=9$ 의 공통접선의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 4 ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

원의 중심 $(2,3)$ 과 $(5,7)$ 사이의 거리를 구하면
$\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$ 이므로
두원의 반지름이 5와 3이므로
$d<R+r$ 이므로 두 원은 두 점에서 만나므로
공통외접선만 구할 수 있다.
그러므로, 공통외접선의 길이는
$\sqrt{5^2-(5-3)^2}=\sqrt{21}$ 이다.

23. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　② 3　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

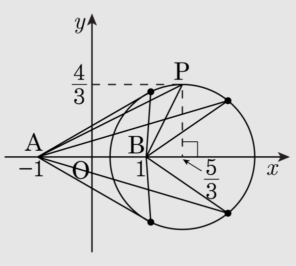
$$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$$

$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

24. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{\text{AP}} : \overline{\text{BP}} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{\text{AP}} = 2\overline{\text{BP}}$

$\therefore \overline{\text{AP}}^2 = 4\overline{\text{BP}}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

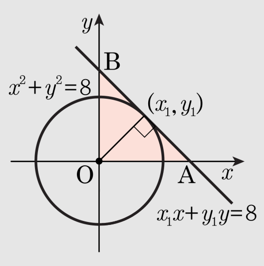
넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

25. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$

$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$

$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.