1. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$

③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$ 이면 $a > b,\ c > 0$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leqq ab + bc + ca$

해설

① $a > 0 > b$인 경우에서 $|b| > |a|$라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$의 결과가 나온다.

② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.

④ $a > b, c > 0$이면 $ac > bc$일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$이면$a < b, c < 0$인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.

⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면
$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \leqq 0$
$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \leqq 0$
$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0$ 위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가
$a - b = 0,\ b - c = 0,\ c - a = 0$을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

2. 정수 x의 값이 $-2 \le x \le 2$일 때, $2x+1$의 최댓값은?

① -3 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$2x+1$은 x에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x가 커지면 $2x+1$값도 커진다.
따라서 $x=2$일 때 $2x+1$값은 최대이고 그 값은 5 이다.

해설

$-2 \le x \le 2 \Rightarrow -4 \le 2x \le 4$
$\Rightarrow -3 \le 2x+1 \le 5$
$\therefore$ 최댓값은 5

3. 다음 연립부등식의 해 중 자연수의 개수가 가장 많은 연립부등식을 고르면?

① $\begin{cases} x \le 1 \\ x > -1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x \le 1 \\ x \le 3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x \le -1 \\ x > -5 \end{cases}$

해설

① $-1 < x \le 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
② $2 < x < 3$ 이므로 자연수는 없다.
③ $x \le 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
④ $x > 4$ 이므로 자연수는 5, 6, 7, 8$\cdots$ 이다.
⑤ $-5 < x \le -1$ 이므로 자연수는 없다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases}$ 을 풀어라.

① $-2 < x \le 1$ ② $1 < x \le 2$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $1 < x < 2$ ⑤ $-1 < x \le 2$

해설

$\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x-x \le -2+6 \\ x > -1 \end{cases} \to \begin{cases} x \le 2 \\ x > -1 \end{cases}$

$\therefore\ -1 < x \le 2$

5. 어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배 하면 20 보다 크고, 어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다고 한다. 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

어떤 정수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만들어 본다. ‘어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배하면 20 보다 크고’ 를 식으로 표현하면, $5(x-10) > 20$ 이고, ‘어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다’ 를 식으로 표현하면, $2x-4 < 28$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면, $\begin{cases} 5(x-10) > 20 \\ 2x-4 < 28 \end{cases}$

이다. 이를 간단히 하면, $\begin{cases} x > 14 \\ x < 16 \end{cases}$ 따라서 $14 < x < 16$ 이다.

x 는 정수이므로 15 이다.

6. 부등식 $|x-1|+|x-2|<3$ 을 풀면?

① $-1<x<4$　② $-1<x<2$　③ $0<x<1$
④ $0<x<2$　⑤ $0<x<3$

해설

(i) $x<1$일 때
$-(x-1)-(x-2)<3,\ -2x<0\ \therefore x>0$
그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$
(ii) $1\le x<2$일 때
$(x-1)-(x-2)<3,\ 0\cdot x<2$
$\therefore$ 모든 x에 대해 성립
그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$
(iii) $x\ge 2$일 때
$(x-1)+(x-2)<3,\ 2x<6\ \therefore x<3$
그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$
(i), (ii), (iii)에서 $0<x<3$

7. 이차부등식 $x^2-2x-8<0$의 해가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2-2x-8<0$ 에서 $(x-4)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<4$

$b-a=6$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 2x^2-9x-18\le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해의 개수는?

① 7 개　② 8 개　③ 9 개　④ 10 개　⑤ 11 개

해설

$\begin{cases} x^2-2x+1>0 & \cdots (가) \\ 2x^2-9x-18\le 0 & \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(x-1)^2>0$

$\therefore x\ne 1$인 모든 실수

(나)에서 $(2x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}\le x\le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\dfrac{3}{2}\le x\le 6, x\ne 1$

이 범위를 만족하는 정수는

−1, 0, 2, 3, 4, 5, 6이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3.1 + 1.7x \geq -2 \\ 4(1-2x) \geq 16 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$\begin{cases} 3.1 + 1.7x \geq -2 \\ 4(1-2x) \geq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 31 + 17x \geq -20 \\ 4 - 8x \geq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore \ -3 \leq x \leq -\dfrac{3}{2}$

만족하는 정수 x 의 합은 $-3 - 2 = -5$ 이다.

10. 연립부등식 $5x+3 \le x+19 < 3x+13$을 풀어라.

① $-3 \le x < 4$ ② $-1 \le x < 5$ ③ $2 < x \le 3$
④ $3 < x \le 4$ ⑤ $4 < x \le 7$

해설

주어진 연립부등식은 다음과 같다.
$5x+3 \le x+19 \cdots$ ①
$x+19 < 3x+13 \cdots$ ②
부등식 ①을 풀면 $4x \le 16 \quad \therefore x \le 4$
부등식 ②를 풀면 $-2x < -6 \quad \therefore x > 3$
$\therefore\ 3 < x \le 4$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \le x+a \\ 2x-b \le 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$\begin{cases} 3x-2 \le x+a & \cdots ① \\ 2x-b \le 3x & \cdots ② \end{cases}$ 이라 하면

①에서 $x \le \dfrac{a+2}{2}$

②에서 $x \ge -b$

$\therefore \ -b \le x \le \dfrac{a+2}{2}$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \le x \le 4$ 이어야 하므로

$-b = 4$ 에서 $b = -4$, $\dfrac{a+2}{2} = 4$ 에서 $a = 6$

따라서 $a-b = 6-(-4) = 10$ 이다.

12. 다음 연립부등식이 해를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x - 10 > a \\ 4x - 5 \le 3 \end{cases}$$

① $a \ge -8$ ② $a > -8$ ③ $a < -8$

④ $a > -12$ ⑤ $a < -12$

해설

정리하면

$$\begin{cases} x > a + 10 \\ x \le 2 \end{cases}$$

해가 존재하기 위해서는 $a + 10 < 2$ 이어야 한다.

$\therefore\ a < -8$

13. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답: 개

▷ 정답: 6개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

14. 부등식 $x^2+x+m \geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2+x+m \geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=1^2-4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$
따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

15. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$　② $a < -\frac{1}{3}$　③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2 + (a+1)x + a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2 + (a+1)x + a = 0$의 판별식을 D라 할 때,

$D = (a+10)^2 - 4a^2 < 0,\ -3a^2 + 2a + 1 < 0$

$3a^2 - 2a - 1 > 0,\ (3a+1)(a-1) > 0$

$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$

따라서 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면

$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

16. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3 \geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3) \leq 0$, $(a-3)(a+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq a \leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

17. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40\ ,\ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40\ ,\quad x^2 - 3x - 40 < 0,$

$(x-8)(x+5) < 0\ ,\quad -5 < x < 8$

$3x^2 - 7x \geq 40\ ,\quad 3x^2 - 7x - 40 \geq 0$

$(3x+8)(x-5) \geq 0\ ,$

$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\frac{8}{3} \rightarrow$

공통범위는 $-5 < x \leq -\frac{8}{3},\quad 5 \leq x < 8$

정수는 $-4,\ -3,\ 5,\ 6,\ 7$: 5개이다.

18. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

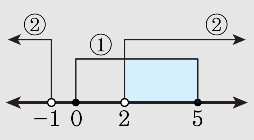
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



19. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로
$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1 \therefore\ x>2$ ⋯⋯㉠
한편, 둔각삼각형이 되려면
$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$
$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$⋯⋯㉡
㉠, ㉡에서 $2<x<4$
$\therefore a=2,\ b=4$
따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은
$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{2}=2$

20. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ \ a \ge 6,\ \ a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

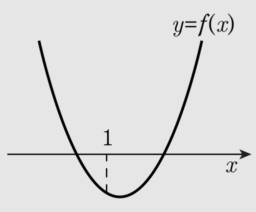
21. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$　　② $m > -2$　　③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$　　⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

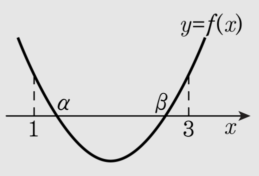
22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$
(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$
(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$
(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$
따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

23. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{a}{4} \geq \frac{x}{4}-\frac{1}{8} \\ 3x-1 \geq 5x-7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$
④ $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

해설

$\frac{x}{2}-\frac{a}{4} \geq \frac{x}{4}-\frac{1}{8}$ 에서 $x \geq a-\frac{1}{2}$

$3x-1 \geq 5x-7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore\ a-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이려면

$0 < a-\frac{1}{2} \leq 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$

24. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 1

해설

$|x| < |a| \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\iff ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

25. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고, 부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2}\leq x<3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\alpha+\beta>2\sqrt{2}$　　ㄴ. $ac>0$

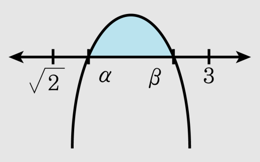
ㄷ. $4a+c<2b$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a<0$, $\sqrt{2}\leq\alpha<\beta<3$을 만족하여야 한다.



ㄱ. $\sqrt{2}\leq\alpha<\beta$에서 $\alpha+\beta>2\sqrt{2}$

ㄴ. $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$이므로 $ac>0$이다.

ㄷ. $f(-2)=4a-2b+c<0$에서 $4a+c<2b$