

1. 세 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$

③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$ 이면 $a > b, c > 0$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$

해설

① $a > 0 > b$ 인 경우에서 $|b| > |a|$ 라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$ 의 결과가 나온다.

② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.

④ $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$ 일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$ 이면 $a < b, c < 0$ 인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.

⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \leq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \leq 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0 \text{ 위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가}$$

$a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$ 을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

2. 정수 x 의 값이 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, $2x + 1$ 의 최댓값은?

① -3

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

$2x + 1$ 은 x 에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x 가 커지면 $2x + 1$ 값도 커진다.

따라서 $x = 2$ 일 때 $2x + 1$ 값은 최대이고 그 값은 5이다.

해설

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 4$$

$$\Rightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 5$$

$\therefore$ 최댓값은 5

3. 다음 연립부등식의 해 중 자연수의 개수가 가장 많은 연립부등식을 고르면?

$$\textcircled{1} \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x > 2 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} x \leq -1 \\ x > -5 \end{cases}$$

해설

- ① $-1 < x \leq 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
- ② $2 < x < 3$ 이므로 자연수는 없다.
- ③ $x \leq 1$ 이므로 자연수는 한 개이다.
- ④ $x > 4$ 이므로 자연수는 5, 6, 7, 8... 이다.
- ⑤ $-5 < x \leq -1$ 이므로 자연수는 없다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \leq x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases}$ 을 풀어라.

① $-2 < x \leq 1$

② $1 < x \leq 2$

③ $-1 \leq x < 2$

④ $1 < x < 2$

⑤ $-1 < x \leq 2$

해설

$$\begin{cases} 3(x-2) \leq x-2 \\ x+2 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-x \leq -2+6 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\therefore -1 < x \leq 2$$

5. 어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배 하면 20 보다 크고, 어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다고 한다. 어떤 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

어떤 정수를 x 라고 하고 문제의 조건을 이용하여 두 개의 식을 만들어 본다. ‘어떤 정수에서 10 을 빼고 5 배하면 20 보다 크고’ 를 식으로 표현하면, $5(x - 10) > 20$ 이고, ‘어떤 정수에 2 배를 하고 4 를 빼면 28 보다 작다’ 를 식으로 표현하면, $2x - 4 < 28$ 이다.

두 개의 부등식을 연립부등식으로 표현하면,
$$\begin{cases} 5(x - 10) > 20 \\ 2x - 4 < 28 \end{cases}$$

이다. 이를 간단히 하면,
$$\begin{cases} x > 14 \\ x < 16 \end{cases}$$
 따라서 $14 < x < 16$ 이다.

x 는 정수이므로 15 이다.

6. 부등식 $|x-1| + |x-2| < 3$ 을 풀면?

① $-1 < x < 4$

② $-1 < x < 2$

③ $0 < x < 1$

④ $0 < x < 2$

⑤ $0 < x < 3$

해설

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1) - (x-2) < 3, -2x < 0 \therefore x > 0$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때

$$(x-1) - (x-2) < 3, 0 \cdot x < 2$$

$\therefore$ 모든 x 에 대해 성립

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 $1 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x-1) + (x-2) < 3, 2x < 6 \therefore x < 3$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 3$

(i), (ii), (iii) 에서 $0 < x < 3$

7. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $b - a$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \text{ 에서 } (x - 4)(x + 2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 4$$

$$b - a = 6$$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 9x - 18 \leq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해의 개수는?

- ① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 10개 ⑤ 11개

해설

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 & \cdots (가) \\ 2x^2 - 9x - 18 \leq 0 & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(x-1)^2 > 0$

$\therefore x \neq 1$ 인 모든 실수

(나)에서 $(2x+3)(x-6) \leq 0$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq 6$$

따라서 공통 범위를 구하면

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq 6, x \neq 1$$

이 범위를 만족하는 정수는
-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3.1 + 1.7x \geq -2 \\ 4(1 - 2x) \geq 16 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{cases} 3.1 + 1.7x \geq -2 \\ 4(1 - 2x) \geq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 31 + 17x \geq -20 \\ 4 - 8x \geq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore -3 \leq x \leq -\frac{3}{2}$$

만족하는 정수 x 의 합은 $-3 - 2 = -5$ 이다.

10. 연립부등식 $5x + 3 \leq x + 19 < 3x + 13$ 을 풀어라.

① $-3 \leq x < 4$

② $-1 \leq x < 5$

③ $2 < x \leq 3$

④ $3 < x \leq 4$

⑤ $4 < x \leq 7$

해설

주어진 연립부등식은 다음과 같다.

$$5x + 3 \leq x + 19 \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 19 < 3x + 13 \cdots \textcircled{2}$$

부등식 ①을 풀면 $4x \leq 16 \quad \therefore x \leq 4$

부등식 ②를 풀면 $-2x < -6 \quad \therefore x > 3$

$$\therefore 3 < x \leq 4$$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 2 \leq x + a \\ 2x - b \leq 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} 3x - 2 \leq x + a & \cdots \textcircled{1} \\ 2x - b \leq 3x & \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{이라 하면}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x \leq \frac{a+2}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } x \geq -b$$

$$\therefore -b \leq x \leq \frac{a+2}{2}$$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \leq x \leq 4$ 이어야 하므로

$$-b = 4 \text{ 에서 } b = -4, \frac{a+2}{2} = 4 \text{ 에서 } a = 6$$

따라서 $a - b = 6 - (-4) = 10$ 이다.

12. 다음 연립부등식이 해를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x - 10 > a \\ 4x - 5 \leq 3 \end{cases}$$

① $a \geq -8$

② $a > -8$

③ $a < -8$

④ $a > -12$

⑤ $a < -12$

해설

정리하면

$$\begin{cases} x > a + 10 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

해가 존재하기 위해서는 $a + 10 < 2$ 이어야 한다.

$$\therefore a < -8$$

13. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9 - x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$$2800 \leq 200(9 - x) + 500x \leq 3600$$

$$\begin{cases} 2800 \leq 200(9 - x) + 500x \\ 200(9 - x) + 500x \leq 3600 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{10}{3} \leq x \leq 6$$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

14. 부등식 $x^2 + x + m \geq 0$ 의 x 의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m 의 최솟값은?

① -4

② 0

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$x^2 + x + m \geq 0$ 이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하려면
 $x^2 + x + m = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = 1^2 - 4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$$

따라서 실수 m 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

15. 부등식 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$ 을 만족하는 실수 x 가 존재하기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 1$

② $a < -\frac{1}{3}$

③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$ 을 만족하는 실수가 존재하는 경우는 전체에서 모든 실수 x 에 대하여

$ax^2 + (a+1)x + a < 0$ 인 경우를 제외하면 된다.

$ax^2 + (a+1)x + a < 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a < 0 \cdots \textcircled{㉠}$

또, 이차방정식 $ax^2 + (a+1)x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D = (a+1)^2 - 4a^2 < 0, \quad -3a^2 + 2a + 1 < 0$$

$$3a^2 - 2a - 1 > 0, \quad (3a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a > 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$

따라서 $ax^2 + (a+1)x + a \geq 0$ 을 만족하는 실수가 존재하려면 $a \geq -\frac{1}{3}$ 이면 된다.

16. $x^2 - 2ax + 2a + 3 < 3$ 을 만족하는 x 가 없도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 9개

해설

$x^2 - 2ax + 2a + 3 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a + 3) \leq 0, (a - 3)(a + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서, 구하는 정수 a 의 개수는

-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

17. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x 의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40, \quad 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$$x^2 < 3x + 40, \quad x^2 - 3x - 40 < 0,$$

$$(x - 8)(x + 5) < 0, \quad -5 < x < 8$$

$$3x^2 - 7x \geq 40, \quad 3x^2 - 7x - 40 \geq 0$$

$$(3x + 8)(x - 5) \geq 0,$$

$$x \geq 5 \text{ 또는 } x \leq -\frac{8}{3} \rightarrow$$

$$\text{공통범위는 } -5 < x \leq -\frac{8}{3}, \quad 5 \leq x < 8$$

정수는 $-4, -3, 5, 6, 7$: 5개이다.

18. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

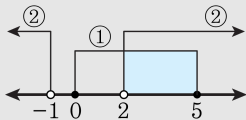
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$$\therefore x < -1, x > a \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \leq 5$ 이므로 a 의 값은 2이다.



19. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로

$$x-1 > 0, x > 0, x+1 > 0, x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, 둔각삼각형이 되려면

$$(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$$

$$x^2 - 4x < 0 \text{에서 } 0 < x < 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 2 < x < 4$$

$$\therefore a = 2, b = 4$$

따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

20. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$$\therefore k = -6$$

21. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$

② $m > -2$

③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$

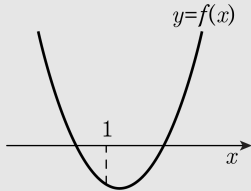
⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore m > 5$



22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

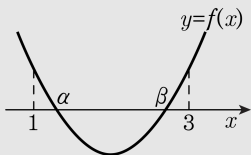
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 > 0 \text{ 에서 } (a+4)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 4$$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$$f(3) = 13 - 3a > 0 \text{ 에서 } a < \frac{13}{3}$$

$$\therefore a < \frac{13}{3}$$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$$x = \frac{a}{2} \text{ 이므로 } 1 < \frac{a}{2} < 3$$

$$\therefore 2 < a < 6$$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

23. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 가 3개일 때, 상수

a 의 값의 범위는?

① $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$

③ $0 \leq a < 1$

④ $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$

⑤ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

해설

$$\frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \text{ 에서 } x \geq a - \frac{1}{2}$$

$$3x - 1 \geq 5x - 7 \text{ 에서 } x \leq 3$$

$$\therefore a - \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이려면

$$0 < a - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$$

24. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 1

해설

$$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots ①$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots ②$$

$$\therefore a < 0, a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{ 일 때 } ① \text{ 은 } x^2 - 1 < 0, ② \text{ 는 } -x^2 + b > 0$$

$$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$$

25. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$ 의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠

② ㉡

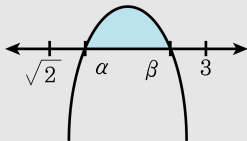
③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$ 을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$ 에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$ 이므로 $ac > 0$ 이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$ 에서 $4a + c < 2b$