1. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$를 일차식 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -10 ② 10 ③ -4 ④ 4 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x+1)Q(x) + R$이라고 놓으면
$f(-1) = R$
$\therefore\ f(-1) = -1 - 2 - 3 - 4 = -10$
따라서 $R = -10$

2. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 할 때, 나머지는?

① $f(2)$ ② $f(-2)$ ③ $f(2)+Q(2)$
④ $Q(2)$ ⑤ $Q(-2)$

해설

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$
$\therefore\ f(2)=R$

3. 다항식 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)^2(x+1)$
② $(x+1)^2(x-1)$
③ $(x-1)(x+1)$
④ $(x-1)^3$
⑤ $(x+1)^3$

해설

$$
\begin{aligned}
x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\
&= (x-1)(x^2-1) \\
&= (x-1)^2(x+1)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

해설

인수정리를 이용하여 인수분해할 수 있다.
$f(1) = 0$,
즉 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

4. 다항식 $ax+ay-bx-by$를 인수분해 하면?

① $x(a-b)$ ② $(a-b)(x-y)$ ③ $(a+b)(x-y)$
④ $(a-b)(x+y)$ ⑤ $(a+b)(x+y)$

해설

$$\begin{aligned} ax+ay-bx-by &= a(x+y)-b(x+y) \\ &= (a-b)(x+y) \end{aligned}$$

5. $x^4 - 6x^2 + 8$를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= (x^2)^2 - 6x^2 + 8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$f(2) = 0,\ \ f(-2) = 0,$

즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로

조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

6. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$ ② $k^2 - 1$ ③ $k^2 + k + 1$
④ $k^2 - k + 1$ ⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

7. $a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 의 최대공약수를 구하면?

① ab^2c^3　　② ab^2c^4　　③ ab^3c^4

④ $a^2b^3c^4$　　⑤ $ab^2c^4e^3$

해설

두 식의 공통인수 중 낮은 차수를 선택하여 곱한다.
$a^2b^3c^4$, $ab^2c^4e^3$ 에서
공통인수는 a, b, c 이고
차수가 낮은 것은 각각 a, b^2, c^4 이다.
이들을 모두 곱하면 최대공약수는 ab^2c^4

8. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$
② $a=3,\ b=4$
③ $a=-1,\ b=-3$
④ $a=4,\ b=-2$
⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0$,
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

9. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$

④ $-x-3$ ⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x+3$

10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

11. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x - 1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$　② $(x-1)x(x+2)$
③ $(x+1)(x-1)(x+2)$　④ $(x-2)(x-1)(x+2)$
⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore\ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore\ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\qquad = (x-1)(x+1)(x+2)$

12. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

13. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$　② $a - b^2$　③ $a^2 - b^2 + c^2$
④ $a^2 + b^2 + c^2$　⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$
$= a^3 - b^3 + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)c^2 - ab(a-b)$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab)$
$= (a-b)(a^2 + b^2 + c^2)$

14. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

15. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

16. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

17. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

18. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

19. x의 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눌 때, 나머지가 2이다. 이 때, $(x^2-x+3)f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하면?

① 10 ② 6 ③ 0 ④ 30 ⑤ 12

해설
$f(-1)=2$
$(x^2-x+3)f(x)=(x+1)Q(x)+R$
$x=-1$ 대입
$\therefore R=5f(-1)=5\times2=10$

20. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & a & b & c \\
  &   & d & e & f \\
\hline
  & 1 & g & h & \multicolumn{1}{|r}{i} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & a & b & c \\
  &   & 1 & a+1 & a+b+1 \\
\hline
  & 1 & a+1 & a+b+1 & \multicolumn{1}{|r}{a+b+c+1} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

21. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$　② $b-c$　③ $c-a$
④ $a+b+c$　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면
(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$
$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$
$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$
$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$
$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$
$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

22. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

23. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① $b = c$인 이등변 삼각형

② $a = c$인 이등변삼각형

③ b가 빗변의 길이인 직각삼각형

④ 정삼각형

⑤ c가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

(준식) $= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b)$

$= (a+b)\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = 0$

$a^2 + b^2 = c^2 \ (\because \ a + b \neq 0)$

$\therefore c$가 빗변의 길이인 직각삼각형

24. $x^2=3-\sqrt{2}$일 때, $\dfrac{x^5-x^4-3x+3}{x-1}$의 값은?

① $8-6\sqrt{2}$ ② $8-4\sqrt{2}$ ③ $5-6\sqrt{2}$
④ $5-4\sqrt{2}$ ⑤ $3-6\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^4-3x+3}{x-1}&=\frac{x^4(x-1)-3(x-1)}{x-1}\\&=\frac{(x^4-3)(x-1)}{x-1}\\&=x^4-3\\&=(3-\sqrt{2})^2-3\\&=11-6\sqrt{2}-3=8-6\sqrt{2}\end{aligned}$$

25. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2 \\ &= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times3-(-2)\times3| = 12$