

1. $a = (1 + i)^n$ 을 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수 n 의 값과 그 때의 a 의 값의 합을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$(1 + i)^n = \{(1 + i)^2\}^{\frac{n}{2}} = (2i)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot i^{\frac{n}{2}}$$

$i^{\frac{n}{2}}$ 이 양의 실수가 되는 최소의 n 의 값은 $i^4 = 1$ 이므로 $\frac{n}{2} = 4$

$$\therefore n = 8$$

$$\therefore a = (2i)^4 = 16$$

$$\therefore n = 8, a = 16$$

$$\therefore n + a = 24$$

2. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$
ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

3. 이차방정식 $x^2 + 2x - a = 0$ 의 해가 3 또는 b 라 할 때, 상수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

해설

$x = 3$ 이 $x^2 + 2x + a = 0$ 의 근이므로

$3^2 + 2 \cdot 3 - a = 0 \quad \therefore a = 15$

$\therefore a = 15$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2 + 2x - 15 = 0, (x + 5)(x - 3) = 0$

따라서 $x = -5$ 또는 $x = 3$ 이므로 $b = -5$

$\therefore a + b = 15 + (-5) = 10$

4. 이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta = 7$ 이 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은? (단, a 는 실수)

- ① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

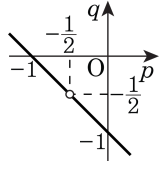
해설

$\alpha + \beta = 8, \alpha - \beta = 7$ 이므로

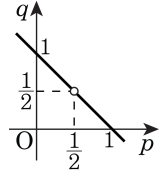
$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{1}{4} \{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(8^2 - 7^2) \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

5. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 - px - q = 0$, $x^2 - qx - p = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p , q 의 관계를 나타낸 그래프는?

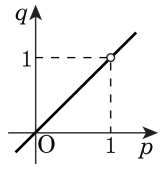
①



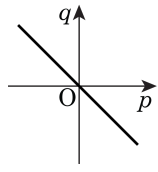
②



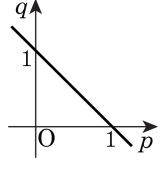
③



④



⑤



해설

$$\begin{cases} x^2 - px - q = 0 & \dots ① \\ x^2 - qx - p = 0 & \dots ② \end{cases}$$

$$① - ② \text{에서 } (-p + q)x - (-p + q) = 0$$

$$\therefore (-p + q)(x - 1) = 0$$

여기서 $-p + q = 0$ 이면 즉 $q = p$ 이면

①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore x = 1$ 이다.

$$\text{이 때 } ① \text{에서 } 1 - p - q = 0$$

$$\text{따라서 구하는 식은 } q = -p + 1 (\text{단, } p \neq q)$$

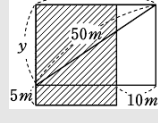
6. 대각선의 길이가 50m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5m 늘리고, 가로를 10m 줄이면 넓이가 50m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답: m

▶ 정답: 48m

애니메이션

저음 식사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x\text{ m}$, $y\text{ m}$ 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{㉑} \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots \textcircled{㉒} \end{cases}$$

㉔을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore x = 2y + 20 \dots \textcircled{c}$
 $\textcircled{c}$ 을 $\textcircled{b}$ 에 대입하면

$$(200 + 20)^2 + \dots^2 = 5$$

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉔에 대입하면 $x = 48$

7. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

- ① 1

② 2

③ 3
- ④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
 $(m - 4)(n - 2) = 8$
 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$ 이므로
 $(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$
 $\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x < 18 \\ 2x > -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\therefore -3 < x < 6$$

$$\therefore x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

9. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2(2x-3) > x+3 \\ 5x-9 < 2(3x+7) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 3$

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } & 2(2x-3) > x+3 \\ & \Rightarrow 4x-6 > x+3 \\ & \Rightarrow x > 3 \\ \text{ii) } & 5x-9 < 2(3x+7) \\ & \Rightarrow -x < 23 \\ & \Rightarrow x > -23 \\ \therefore & x > 3 \end{aligned}$$

10. 연립부등식 $ax + 3 \leq -4x + 7$, $5x - 2 \leq 6x + b$ 의 해가 $x = 2$ 일 때, $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 식을 정리하면

$$ax + 3 \leq -4x + 7 \quad \therefore x \leq \frac{4}{a+4}$$

$$5x - 2 \leq 6x + b \quad \therefore x \geq -b - 2$$

해가 $x = 2$ 가 되기 위해서는 $\frac{4}{a+4} = 2$, $-b - 2 = 2$ 이어야 한다.

$$\therefore a = -2, b = -4$$

$$\therefore a \times b = (-2) \times (-4) = 8$$

11. 부등식 $\begin{cases} x-11 \geq 2x-4 \\ a-x < 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$$\begin{cases} x-11 \geq 2x-4 \\ a-x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x > a-1 \end{cases}$$

의 해가 없으므로 $a-1 \geq -7$

$$\therefore a \geq -6$$

따라서 a 의 가장 작은 수는 -6 이다.

12. 장미꽃을 포장하는데 3송이씩 묶으면 2송이가 남고, 5송이씩 묶으면 3송이씩 묶을 때보다 3 묶음 줄어든다. 장미꽃은 몇 송이인지 구하여라.(정답 2개)

▶ 답: 송이

▶ 답: 송이

▷ 정답: 23 송이

▷ 정답: 26 송이

해설

장미꽃의 묶음의 수를 x 묶음이라 하면
장미꽃은 $(3x + 2)$ 송이이다.

$$5(x - 3) \leq 3x + 2 \leq 5(x - 3) + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x - 3) \leq 3x + 2 \\ 3x + 2 \leq 5(x - 3) + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 17 \\ -2x \leq -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{17}{2} \\ x \geq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{13}{2} \leq x \leq \frac{17}{2}$$

따라서 $x = 7, 8$ 이므로 $3 \times 7 + 2 = 23$ (송이) 또는 $3 \times 8 + 2 = 26$ (송이) 이다.

13. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + 1 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 값의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 x 에 대해 $x^2 + ax + 1 > 0$ 이라면



위의 그림과 같이 되어야 하므로

판별식이 음수이어야 한다.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \text{에서 } a^2 < 4$$

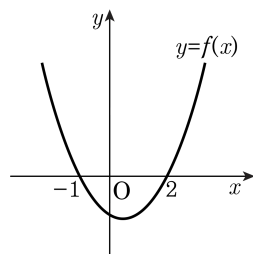
$$\therefore -2 < a < 2$$

$$\therefore a = -1, 0, 1 \text{ (3개)}$$

14. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식

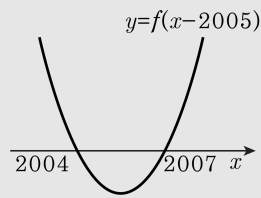
$$f(x - 2005) \leq 0 \text{ 의 해는?}$$

- ① $1999 \leq x \leq 2002$
- ② $2000 \leq x \leq 2003$
- ③ $2001 \leq x \leq 2004$
- ④ $2002 \leq x \leq 2004$
- ⑤ $2004 \leq x \leq 2007$



해설

함수 $y = f(x - 2005)$ 의 그래프는
 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 2005만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 $y = f(x - 2005)$ 의 그래프는
 다음 그림과 같으므로 부등식
 $y = f(x - 2005) \leq 0$ 의 해는
 $2004 \leq x \leq 2007$



15. 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + 2a < 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값이 존재하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$ 에서
 $(x - 5)(x + 1) < 0$ 이므로
 $-1 < x < 5$
 $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + 2a < 0$ 에서
 $x^2 - 2(a + 1)x + a(a + 2)$
 $= (x - a)(x - a - 2) < 0$ 이므로
 $a < x < a + 2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
 $a + 2 > -1$
즉 $a > -3$ 또는 $a < 5$ 에서
 $-3 < a < 5$
따라서 정수 a 의 개수는 7개다.

16. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1

㉡ -1

㉢ i

㉣ $-i$

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣
- ④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함)개 있다.
 i) -1 이 $4k + 2(k = 0, 1, 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} = \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1$$

 ii) -1 이 $4k(k = 0, 1, 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} = \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} = 1$$

 i), ii)에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

17. 이차방정식 $f(2x+1) = 2$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 4$ 가 성립한다. 이 때, $3f(x) - 2 = 4$ 의 두 근의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $f(2x+1) = a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = 2$
 $\therefore a(4x^2 + 4x + 1) + b(2x+1) + c - 2 = 0$
 $4ax^2 + 4ax + a + 2bx + b + c - 2 = 0$
 $4ax^2 + (4a + 2b)x + a + b + c - 2 = 0$
따라서 두 근의 합 $\alpha + \beta = \frac{-(4a + 2b)}{4a} = 4$
 $\therefore 4a + 2b = -16a, \quad 2b = -20a$ 이므로
 $b = -10a$
 $3f(x) - 2 = 4$ 이므로 $3f(x) = 6$
 $\therefore f(x) = 2 \quad \therefore ax^2 + bx + c - 2 = 0$ 에서
두 근의 합 $\alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -\frac{-10a}{a} = 10$

18. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

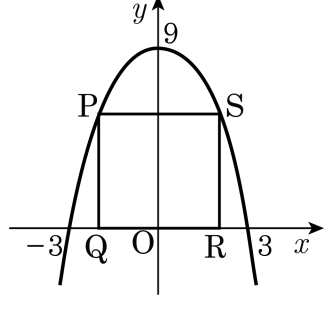
④ 1

⑤ 3

해설

$2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$
 $= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6$
 $= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3$
 x, y 는 실수이므로 $(x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0$
 $\therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3$
따라서, $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

19. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
(0, 9) 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
(3, 0) 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
 $R(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $S(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2(2a + (-a^2 + 9)) = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

20. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{를 } t \text{로 치환하면}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{는 } 3 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

21. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

22.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $\frac{18}{5}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ ㉠
 $x + |y| - y = 12$ ㉡
 $x \leq 0$ 이면, $y = 10, x = 12$
 이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $x > 0$ 이면 $2x + y = 10$㉢
 $y \geq 0$ 이면 $x = 12, y = -14$
 이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.
 $y < 0$ 이면, $x - 2y = 12$㉣
 ㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$
 $\therefore x + y = \frac{18}{5}$

23. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.
- ⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$
 $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는
 $a = 0, b = 0$ 뿐이다.
따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 는 없다.

24. 부등식 $(x-2)(ax-1) < 0$ 의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ㉠ 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a 가 있다.
㉡ $a = 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
㉢ $a < 0$ 이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.
㉣ $a > 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
㉤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 모두 거짓이다.

해설

- ㉠ $a \neq 0$ 일 때
 $(x-2)(ax-1) = a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$ 이면 이 부등식의 해는 없다.
㉡ $a = 0$ 이면 이 부등식은 $-(x-2) < 0$,
즉 $x-2 > 0$ 이므로 해는 $x > 2$ 이다.
㉢ $a < 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) > 0$ 이므로
 $x < \frac{1}{a}$ 또는 $x > 2$ 이다.
㉣ $a > 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$ 이므로
 $a < \frac{1}{2}$ 일때, $2 < x < \frac{1}{a}$,
 $a > \frac{1}{2}$ 일때 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.

25. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 1), B(1, -2) 와 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{211}{10}$

해설

점 P 의 좌표를 $(a, 2a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= (a - 4)^2 + (2a - 1)^2 + (a - 1)^2 + (2a + 2)^2$$

$$= 10a^2 - 6a + 22$$

$$= 10 \left(a - \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{211}{10}$$

따라서 $a = \frac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{211}{10}$ 이다.