

1. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

2. 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $0 \leq k < 7$ ② $-1 \leq k \leq 2$ ③ $-5 \leq k \leq -2$
④ $-7 < k \leq -1$ ⑤ $-7 < k \leq -3$

해설

이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의
두 근이 모두 1보다 크므로
 $f(x) = x^2 + 2kx + 6 - k$ 로 놓으면
(i) $D \geq 0$ 이므로
 $k^2 + k - 6 \geq 0$
 $(k + 3)(k - 2) \geq 0$
 $\therefore k \leq -3, k \geq 2$
(ii) $x^2 + 2kx + 6 - k = (x + k)^2 + 6 - k - k^2$ 에서
 $-k > 1$
 $\therefore k < -1$
(iii) $f(1) > 0$ 이므로
 $1 + 2k + 6 - k > 0$
 $\therefore k > -7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
 $\therefore -7 < k \leq -3$

3. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$ 이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$

② $m > 1$

③ $m > -2$

④ $m > 2$

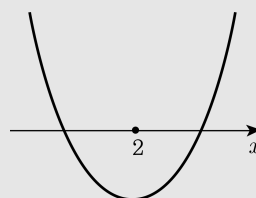
⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다

작은 근을 가지면 $f(2) < 0$

$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$ 이므로 $m > 3$



4. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$

② $m > -2$

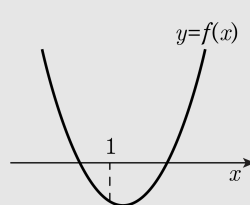
③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$

⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 $f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$
 $\therefore m > 5$



5. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

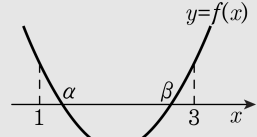
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$

$\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

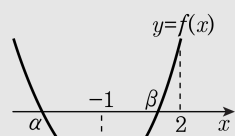
따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

6. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$
 ④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1 - 2a + a^2 - 1 < 0$ 에서 $a^2 - 2a < 0$, $a(a-2) < 0$
 $\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$
 $\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

7. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

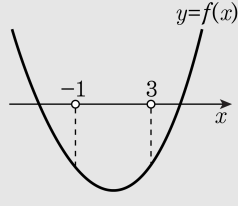
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$

$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

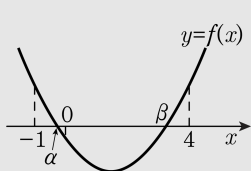
따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

8. 이차방정식 $x^2 - 4kx + k^2 - 1 = 0$ 의 해를 α, β 라 할 때, $-1 < \alpha < 0 < \beta < 4$ 를 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq k < 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $-1 < k < 5$
 ④ $0 < k < 1$ ⑤ $0 < k < 5$

해설

$f(x) = x^2 - 4kx + k^2 - 1$ 이라 하면
 $f(x) = 0$ 의 근 α, β 가
 $-1 < \alpha < 0 < \beta < 4$ 를 만족시키므로
 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- (i) $f(-1) > 0$ 에서 $k^2 + 4k > 0$
 $\therefore k < -4$ 또는 $k > 0 \dots \textcircled{A}$
 (ii) $f(0) < 0$ 에서 $k^2 - 1 < 0$
 $\therefore -1 < k < 1 \dots \textcircled{B}$
 (iii) $f(4) > 0$ 에서 $k^2 - 16k + 15 > 0$
 $\therefore k < 1$ 또는 $k > 15 \dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 의 공통 범위를 구하면
 $0 < k < 1$

9. 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 실근 α, β 가 $\alpha < 0 < \beta$ 을 만족할 때, a 의 범위를 구하면?

- ① $a > 2$ 또는 $a < -2$
② $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$
③ $a > \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a < -\frac{4}{\sqrt{3}}$
④ $-2 < a < 2$
⑤ $2 < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}} < a < -2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4(a^2 - 4) > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}} < a < \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ii) 두 근이 $\alpha < 0 < \beta$ 이라면

$x = 0$ 을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow a^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2 < a < 2$$

i), ii)의 공통 범위: $-2 < a < 2$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 -1 과 2 사이에 있도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

③ $-2 < a < 4$

⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

② $2 < a < \frac{5}{2}$

④ $-2 < a < \frac{5}{2}$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$$D > 0 \text{에서 } D = a^2 - 4 > 0, (a - 2)(a + 2) > 0$$

$$\therefore a > 2 \text{ 또는 } a < -2$$

(ii) $f(-1) > 0$ 에서 $1 + a + 1 > 0$

$$\therefore a > -2$$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$$\therefore \frac{5}{2} > a$$

(iv) 대칭축이 -1 과 2 사이에 있어야 하므로

$$-1 < \frac{a}{2} < 2$$

$$\therefore -2 < a < 4$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$