1. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

2. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$ ② $-1 \le k \le 2$ ③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$ ⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로

$k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3, k \ge 2$

(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서

$-k>1$

$\therefore k<-1$

(iii) $f(1)>0$ 이므로

$1+2k+6-k>0$

$\therefore k>-7$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7<k\le -3$

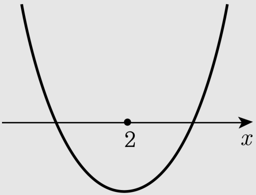
3. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$　② $m > 1$　③ $m > -2$

④ $m > 2$　⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크고 2보다
작은 근을 가지면 $f(2) < 0$
$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$이므로 $m > 3$



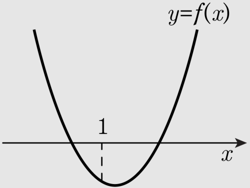
4. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

5. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

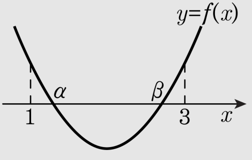
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

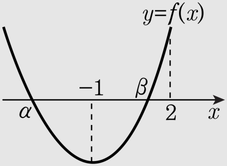
6. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$　　② $-2<a<1$　　③ $0<a<2$

④ $1<a<2$　　⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$

$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$

$\therefore a<-3$, $a>-1$

(i), (ii) 에서 $0<a<2$

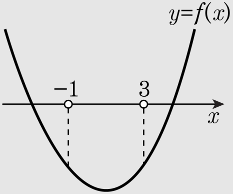
7. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$
(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

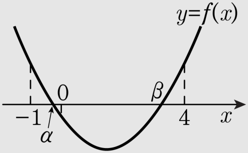
8. 이차방정식 $x^2-4kx+k^2-1=0$의 해를 α, β라 할 때, $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k < 1$　② $-1<k<1$　③ $-1<k<5$

④ $0<k<1$　⑤ $0<k<5$

해설

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 근 α, β 가
$-1<\alpha<0<\beta<4$ 를 만족시키므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$ 에서 $k^2+4k>0$
$\therefore k<-4$ 또는 $k>0 \cdots$ ㉠
(ii) $f(0)<0$ 에서 $k^2-1<0$
$\therefore -1<k<1 \cdots$ ㉡
(iii) $f(4)>0$ 에서 $k^2-16k+15>0$
$\therefore k<1$ 또는 $k>15 \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면
$0<k<1$

9. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

i) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ii) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

i), ii) 의 공통 범위 : $-2<a<2$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $2 < a < \frac{5}{2}$

③ $-2 < a < 4$

④ $-2 < a < \frac{5}{2}$

⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

D > 0에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$