1. $2(4+2)\left(4^2+2^2\right)\left(4^4+2^4\right)\left(4^8+2^8\right)=4^a-2^b$ 일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 16　　④ 32　　⑤ 64

해설

$2=4-2$ 이므로
$(4-2)(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$
$=(4^2-2^2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$
$=(4^4-2^4)(4^4+2^4)(4^8+2^8)$
$=(4^8-2^8)(4^8+2^8)$
$=4^{16}-2^{16}$
$\therefore a+b=16+16=32$

2. $(x+A)(x+B)$ 를 전개하였더니 x^2+Cx-3 이 되었다. 다음 중 C 의 값이 될 수 있는 것은?(단, $A,\ B,\ C$ 는 정수이다.)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(x+A)(x+B) = x^2+(A+B)x+AB = x^2+Cx-3$ 이므로 $A+B=C,\ AB=-3$ 이다. 따라서 $C=(1-3,\ -1+3,\ 3-1,\ -3+1)=(-2,\ 2)$ 이다.

3. $(x-2y-1)^2$ 을 전개하였을 때 x^2 의 계수를 A , x 의 계수를 B , 상수항을 C 라 할 때, $A+B+C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x-2y-1)(x-2y-1)$
$=x^2-2xy-x-2xy+4y^2+2y-x+2y+1$
$=x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1$
x^2 의 계수는 1 , x 의 계수는 -2 , 상수항은 1 이다.
따라서 $A=1$, $B=-2$, $C=1$ 이다.
$\therefore A+B+C=1-2+1=0$

4. $x=a(a+5)$일 때, $(a-1)(a+2)(a+3)(a+6)$을 x에 관한 식으로 나타내면?

① x^2-36 ② x^2-6 ③ x^2+6
④ x^2+36 ⑤ $x^2-12x+36$

해설

$x=a(a+5)=a^2+5a$일 때,

$(a-1)(a+2)(a+3)(a+6)$

$=\{(a-1)(a+6)\}\{(a+2)(a+3)\}$

$=(a^2+5a-6)(a^2+5a+6)$

$=(x-6)(x+6)$

$=x^2-36$

5. 다음 식의 값을 곱셈공식을 활용하여 구하려고 한다. (　　　) 에 알맞은 수는?

$$(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})+2^{63}$$
$$=2^{(\quad)}$$

① 126　　② 127　　③ 128　　④ 129　　⑤ 130

해설

$(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$ 에

$\frac{1}{2}\times(4-2)$ 를 곱한다.

$(\frac{1}{2}\times(4-2)=1$ 이므로 식의 값은 변하지 않는다.)

$\frac{1}{2}(4-2)(4+2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$

$=\frac{1}{2}\times(4^2-2^2)(4^2+2^2)(4^4+2^4)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$

$=\frac{1}{2}\times(4^4-2^4)(4^4+2^4)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$

$=\frac{1}{2}\times(4^8-2^8)(4^8+2^8)(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$

$=\frac{1}{2}\times(4^{16}-2^{16})(4^{16}+2^{16})(4^{32}+2^{32})$

$=\frac{1}{2}\times(4^{32}-2^{32})(4^{32}+2^{32})=\frac{1}{2}(4^{64}-2^{64})$

$=\frac{1}{2}(2^{128}-2^{64})$

$=2^{127}-2^{63}$

따라서 주어진 식은 $(2^{127}-2^{63})+2^{63}=2^{(\quad)}$ 이므로

$\therefore\ 2^{(\quad)}=2^{127}$　　　$\therefore\ (\quad)=127$

6. $ax^2+24x+b=(3x+c)^2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 차례로 구하면?

① $a=9,\ b=16,\ c=-4$
② $a=9,\ b=8,\ c=4$
③ $a=9,\ b=16,\ c=2$
④ $a=9,\ b=16,\ c=4$
⑤ $a=3,\ b=-8,\ c=4$

해설

$(3x+c)^2=9x^2+6cx+c^2$
$a=9$
$6c=24,\ c=4$
$b=c^2,\ b=16$
$\therefore a=9,\ b=16,\ c=4$

7. 길이가 52 cm 인 끈을 적당히 두 개로 잘라 한 변의 길이가 각각 a cm 와 b cm 인 정사각형 두 개를 만들었다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 109 cm^2 일 때, 넓이의 차를 구하면? (단, $a > b > 0$)

① 7 cm^2　② 13 cm^2　③ 25 cm^2
④ 49 cm^2　⑤ 91 cm^2

해설

$4a + 4b = 52$ 이므로 $a + b = 13$
$a^2 + b^2 = 109$
$(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$
$109 = 169 - 2ab$
$\therefore ab = 30$
$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 169 - 120 = 49$
$a - b > 0,\ a - b = 7$
$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 13 \times 7 = 91$

8. $2+\sqrt{3}$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y 라고 할 때, $\left(1-\sqrt{x}\right)^2+\frac{4}{y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$3<2+\sqrt{3}<4$ 이므로

$2+\sqrt{3}$ 의 정수부분은 3, 소수부분은 $\sqrt{3}-1$ 이다.

$x=3,\ y=\sqrt{3}-1$

$\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\frac{4}{\sqrt{3}-1}$

$=4-2\sqrt{3}+\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=6$

9. $x = \frac{1}{5-3\sqrt{3}}$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면?

① $\frac{130+75\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{130+75\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{130-45\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{130+75\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{120+75\sqrt{3}}{2}$

해설

$x = \frac{5+3\sqrt{3}}{(5-3\sqrt{3})(5+3\sqrt{3})} = \frac{5+3\sqrt{3}}{-2}$

$\frac{1}{x} = 5-3\sqrt{3}$,

$x^2 = \frac{52+30\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{x^2} = 52-30\sqrt{3}$

$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{260-90\sqrt{3}}{4} = \frac{130-45\sqrt{3}}{2}$

10. $x^3+y^3=3(x^2-xy+y^2)$, $x^2+y^2=6$ 일 때, x^4-y^4 의 값을 구하여라.
(단, $x>y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $18\sqrt{3}$

해설

$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=3(x^2-xy+y^2)$ 이므로
$\therefore\ x+y=3$
$x^2+y^2=6$ 과 $x+y=3$ 에서
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$6=3^2-2xy$
$\therefore\ xy=\frac{3}{2}$
$x^2+y^2=6$ 과 $xy=\frac{3}{2}$ 에서
$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$6=(x-y)^2+3$
$\therefore\ x-y=\sqrt{3}\ (\because\ x>y)$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^4-y^4 &= (x^2+y^2)(x+y)(x-y)\\ &= 6\times 3\times\sqrt{3}=18\sqrt{3}\end{aligned}$$

11. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\dfrac{ax^2+2x+b}{5x^2-cx+3}=4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값은?

① 100 ② 120 ③ 240 ④ -120 ⑤ -100

해설

$\dfrac{ax^2+2x+b}{5x^2-cx+3}=4$ 를 정리하면,

$(a-20)x^2+(2+4c)x+b-12=0$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.

따라서 $a-20=0,\ 2+4c=0,\ b-12=0$

$\therefore\ a=20,\ b=12,\ c=-\dfrac{1}{2}$

$abc=20\times12\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-120$

12. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A, 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$3A^2 - A + 2 = 0$, $B^2 - 3B - 6 = 0$이므로
$3A^2 - A = -2$, $B^2 - 3B = 6$
$\therefore\ 3A^2 + B^2 - A - 3B$
$= 3A^2 - A + B^2 - 3B$
$= -2 + 6 = 4$

13. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때, $(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

$x = p$ 를 대입하면 $2p^2 - 2p - 1 = 0$, $2p^2 - 2p = 1$ 이므로

$p^2 - p = \frac{1}{2}$ 이다.

$x = q$ 를 대입하면 $2q^2 - 2q - 1 = 0$, $2q^2 - 2q = 1$ 이므로

$q^2 - q = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1) &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$ 이다.

14. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$
② $x^2 + 2x - 35 = 0$
③ $x^2 - 12x + 35 = 0$
④ $x^2 + 12x + 35 = 0$
⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x-5)(x-3) = 0$
$a = 5,\ b = 3$
$\therefore a+2 = 7,\ b+2 = 5$
따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은
$(x-7)(x-5) = 0$
$\therefore\ x^2 - 12x + 35 = 0$

15. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$ 의 공통인 해가 2 일 때, ab 의 값을 구하면?

① -25 ② -10 ③ 1 ④ 10 ⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2 를 대입하면
$8 - 2a + 2 = 0, \quad a = 5$
$4 - 6 + b = 0, \quad b = 2$
$\therefore ab = 10$

16. $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0(xy \neq 0)$ 일 때, $9y^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ 의 x, y 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{3}{2}$ 또는 1.5

▷ 정답 : $y = \frac{1}{2}$ 또는 0.5

해설

$x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$ 에서 $(x - 3y)^2 = 0$

$\therefore x = 3y$

$x^2 = 9y^2$ 이므로 $9y^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ 에 대입하면

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$

따라서 $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 이다.

17. 이차방정식 $x^2 - ax - 2x + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때의 a 의 값이 이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$x^2 - ax - 2x + 4 = 0,\ x^2 - (a+2)x + 4 = 0$

$\left(\dfrac{a+2}{2}\right)^2 = 4,\ \dfrac{a+2}{2} = \pm 2$

$a + 2 = \pm 4$

$\therefore\ a = 2$ 또는 $a = -6$

$x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이 $2,\ -6$ 이므로

$$\begin{array}{rl} & 4 + 2m + n = 0 \\ -\,) & 36 - 6m + n = 0 \\ \hline & -32 + 8m = 0 \end{array}$$

$\therefore\ m = 4,\ n = -12$

$\therefore\ m + n = 4 - 12 = -8$

18. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때, mn 의 값은?

① 21 ② -21 ③ 27 ④ -27 ⑤ -9

해설

$\frac{1}{3}(x^2 - 6x) = -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m$

$\frac{1}{3}(x-3)^2 = -m + 3$

$\therefore m = 9, n = -3$

$\therefore mn = -27$

19. 이차방정식 $2x^2 - 7x + 2 = 0$ 의 두 근 중에서 큰 것을 m 이라 하면 $n < m < n + 1$ 이다.
정수 n 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x^2 - 7x + 2 = 0, 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) = -2$

$2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right) = -2 + \frac{49}{8}$

$2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{8}, \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$

$x = \frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$

$\therefore m = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}$

$5 < \sqrt{33} < 6$

$\frac{7+5}{4} < m < \frac{7+6}{4}, 3 < m < 3.25$

$3 < m < 4$

$\therefore n = 3$

20. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $k=-6$이면 근이 2개이다.

② $k=-1$이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k=0$이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k=1$이면 근이 1개이다.

⑤ $k=3$이면 중근을 갖는다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k$, $x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

21. 방정식 $(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=4$ 를 만족하는 자연수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 에 대하여 x^2+y^2 의 값을 구하여라. (단 $x \neq y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=4$,

$xy-2(x+y)=0$, $(x-2)(y-2)=4$

$x-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$y-2$	4	2	1	-4	-2	-1

이 중에서 x, y가 자연수인 경우는 (단, $x \neq y$)

x	3	6
y	6	3

따라서 $x^2+y^2=3^2+6^2=45$ 이다.

22. 다음 이차방정식의 근을 구하면?

$$0.5(x-2)(x+1)=\frac{1}{3}(x-2)^2$$

① 1, −7 ② −7, 2 ③ −4, 9 ④ 3, −5 ⑤ 14, 1

해설

양변에 6을 곱하면
$3(x-2)(x+1)=2(x-2)^2$
$3x^2-3x-6=2x^2-8x+8$
$x^2+5x-14=0$
$(x+7)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=2$

23. 이차방정식 $x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값이 최대가 되도록 b 의 값을 정하려고 한다. 이 때, a 의 값은? (단, a , b 는 두 자리의 자연수)

① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

$x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가지려면
$D = 0$, $a^2 - 4 \times 9b = 0$
$\therefore a^2 = 36b = 6^2 b$
따라서 b 는 제곱수이어야 하고, b 가 최대일 때 a 가 최대가 된다.
두 자리의 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81 이므로 $b = 81$ 이다.
$\therefore\ a^2 = 6^2 \times 81 = (6 \times 9)^2 = 54^2$
$\therefore\ a = 54$ ($\because\ a$는 자연수)

24. 1 에서 n 까지의 자연수의 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 합이 78 이 되려면 1 에서 얼마까지 더하면 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{n(n+1)}{2} = 78$, $n(n+1) = 156$,
$n^2 + n - 156 = 0$,
$(n+13)(n-12) = 0$,
$n = -13$ 또는 $n = 12$,
따라서 n 은 자연수이므로 $n = 12$ 이다.

25. 귤 360 개를 학생들에게 똑같이 나누어 주었다. 그 후에 학생 2 명이 더 와서 학생들에게 이미 나누어 준 귤을 2 개씩 받아서(회수하여), 나중에 온 2 명의 학생들에게 똑같이 주었더니 모든 학생들에게 돌아간 귤의 수가 같게 되었다. 처음 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 18 명

해설

처음 학생 수 : x 명이라고 하면,

→ 처음 한 사람당 받은 귤 수 : $\frac{360}{x}$ 개

나중 학생 수 : $(x+2)$ 명

→ 나중에 한 사람당 받은 귤 수 : $\left(\frac{360}{x}-2\right)$ 개 이므로

$\left(\frac{360}{x}-2\right)(x+2)=360$

정리하면 $x^2+2x-360=(x+20)(x-18)=0$

$\therefore\ x=18$