1. 명제 '모든 학생들은 수학을 좋아한다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 모든 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
② 모든 학생들은 영어를 좋아한다.
③ 어떤 학생들은 수학을 좋아한다.
④ 어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.
⑤ 어떤 학생들은 영어를 좋아한다.

해설

'모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 주어진 명제의 부정은 '어떤 학생들은 수학을 좋아하지 않는다.' 이다.

2. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

3. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 8 가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

4. 다음 명제의 대우가 참인 것은?

① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.

② x 가 3 의 배수이면 x 가 6 의 배수이다.

③ $x^2 > 1$ 이면 $x > 1$ 이다

④ 삼각형 ABC 가 직각삼각형이면 $\angle A = 90°$ 이다.

⑤ $a + b > 2$ 이면 $a > 1$ 또는 $b > 1$ 이다.

해설

⑤ 명제의 대우를 살펴보자.
$a \leq 1$ 이고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다. 다음의 대우의 참, 거짓을 판별해보면 a 의 최댓값은 1, b 의 최댓값도 1 이므로 a, b 의 합의 최댓값은 2 이므로 대우는 참이 된다.

5. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$
$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

6. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

> ㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.
> ㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.
② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.
③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.
④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.
⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다. $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.' $\sim r \Rightarrow \sim p$에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

7. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$(f \circ f)(x) = \left(x^3 + x^2 + x - 5\right)^3$
$+ \left(x^3 + x^2 + x - 5\right)^2 + \left(x^3 + x^2 + x - 5\right) - 5$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x = 1$ 을 대입한 것과 같다.

$f(1) = -2$ 이므로

$\therefore\ f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$

8. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1$, $xy - x = 2y+1$, $xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

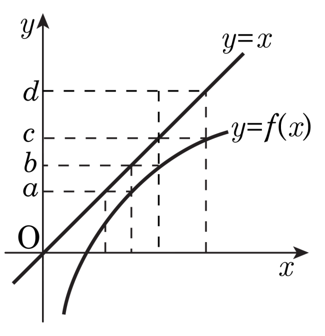
$\therefore\ y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$\quad = \dfrac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

9. 아래의 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b)=k$ 라 하면 $f(k)=b$
$f(c)=b$ 이므로 $k=c$
따라서 $f^{-1}(b)=c$

10. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$ ⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

11. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \to q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12　　② -4　　③ 8　　④ 4　　⑤ 12

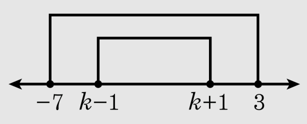
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \to q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$

12. 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 다음에서 옳은 것을 고르면?

㉠ 첫번째 구슬은 빨간색이 아니다.
㉡ 두번째 구슬은 파란색이 아니다.
㉢ 세번째 구슬은 파란색이다.

① 첫번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

해설

㉢이 참이면 ㉡도 참이 되어 모순.
㉠이 거짓이고 ㉡가 참이면 ㉢이 참이 되어 모순 ∴ ㉠이 참이고, ㉡, ㉢이 거짓이다.
∴ 첫번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

13. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

㉠ p : $|a| + |b| = 0$ q : $ab = 0$

㉡ p : $(a-b)(b-c) = 0$ q : $(a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$

㉢ $p : 0 < x < y$ $q : x^2 < y^2$

㉣ $p : x < y$ $q : [x] < [y]$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ p : $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$이고 $b = 0$ q : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 $p \not\Leftarrow q$ 이므로 만족
㉡ p : $(a-b)(b-c) = 0$ $a = b$ 또는 $b = c$ q : $a = b$ 그리고 $b = c$ $\therefore p \not\Rightarrow q$이고 $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족한다.
㉢ $p \Rightarrow q$ ($\because x, y$ 모두 양수) $p \not\Leftarrow q$ ($\because x, y$ 모두 음수이거나 서로 부호가 다를 때 참이 아닐 수 있다.) $\therefore$ 만족
㉣ $p \not\Rightarrow q$ ($\because x = 1, y = 1.5$ 일 때 $[1]=[1.5]=1$일 수 있다.) $p \Leftarrow q$ 이므로 필요조건만 만족

14. 다음 중 틀린 것은?

① $a^2 + b^2 = 0$은 $a = b = 0$이기 위한 필요조건이다.

② $xy \le 1$ 또는 $x + y \le 2$는 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x = 3$은 $x^2 - x - 6 = 0$이기 위한 충분조건이다.

④ a, b, c가 실수일 때, $ac = bc$는 $a = b$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x + y$가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우 : $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1, x + y > 2$ (참)
이 : $xy > 1, x + y > 2 \not\Rightarrow x > 1, y > 1$ (거짓) (반례 : $x = 10$, $y = 0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
$\therefore$ 충분조건

15. 조건 $p,\ q,\ r$ 을 만족시키는 집합을 각각 $P,\ Q,\ R$ 라고 할 때, $P = \{x | -1 \leq x \leq 1,\ x \geq 5\}$, $Q = \{x | x \geq a\}$, $R = \{x | x \geq b\}$ 이다. 이 때, 조건 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, 조건 r 은 p 이기위한 충분조건이면 a 의 최댓값과 b 의 최솟값은?

① a 의 최댓값 1 , b 의 최솟값 -1

② a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 1

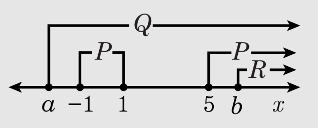
③ a 의 최댓값 5 , b 의 최솟값 -1

④ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

⑤ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -5

해설

$p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면
q 는 p 이기 위한 필요조건,
$r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면
r 은 p 이기 위한 충분조건이므로
$P \subset Q,\ R \subset P$가 되는 $a,\ b$를 정할 수 있다.
문제의 조건을 만족시키도록 집합 $P,\ Q,\ R$ 를 수직선 위에 나타내면



따라서, $a \leq -1,\ b \geq 5$
$\therefore\ a$ 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

16. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P>Q$ ② $P \geq Q$ ③ $P=Q$

④ $P<Q$ ⑤ $P \leq Q$

해설

a, b는 양수이고 $a+b=1$이므로

$0<a<1$, $0<b<1$

또 $b=1-a$이므로

$$P=a^3+b^3=a^3+(1-a)^3$$
$$=a^3+1-3a+3a^2-a^3$$
$$=3a^2-3a+1$$
$$Q=a^2+b^2=a^2+(1-a)^2$$
$$=a^2+a^2-2a+1$$
$$=2a^2-2a+1$$
$$P-Q=3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$$
$$=a^2-a=a(a-1)$$

그런데 $0<a<1$이므로 $a(a-1)<0$

$\therefore P-Q<0$이고 $P<Q$

17. $0 < a < b,\ a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

18. x, y 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.
㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)
㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$
$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$
$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$
$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때
$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로
$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

19. 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2+4y^2+4xy+10x+ay+b>0$이 성립할 $a,\ b$의 조건은? (단, $a,\ b$는 실수)

① $a=20,\ b>25$　　② $a=20,\ b<25$

③ $a=20,\ b\geq 25$　　④ $a=20,\ b\leq 25$

⑤ $a=20,\ b\neq 25$

해설

준식을 x에 관하여 정리하면

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+b>0\cdots$ ㉠

㉠이 x의 모든 실수값에 대하여 성립하려면

$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$\therefore\ (a-20)y+b-25>0\cdots$ ㉡

㉡이 모든 y에 대하여 성립하려면 $a=20$이고 $b>25$이다.

20. a, b, c, d, x, y, z가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

㉠ $a^2+b^2 \geq ab$
㉡ $a^2+b^2+1<2(a+b-1)$
㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leq (ax+by+cz)^2$
㉣ $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert+\lvert b\rvert$
㉤ $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$
㉥ $\lvert a+b\rvert \geq \lvert a\rvert-\lvert b\rvert$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉥

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠ $a^2+b^2-ab=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2 \geq ab$: 맞음

㉡ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$=a^2-2a+b^2-2b+3$

$=(a-1)^2+(b-1)^2+1>0$

$\therefore\ a^2+b^2+1>2(a+b-1)$: 틀림

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2$

$+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+$

$2abxy+2bcyz+2cazx)$

$=(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$: 틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2-\lvert a+b\rvert^2$

$=a^2 2\lvert ab\rvert+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2\lvert ab\rvert-2ab \geq 0(\because\ \lvert ab\rvert \geq ab)$

$\therefore\ \lvert a\rvert+\lvert b\rvert \geq \lvert a+b\rvert$: 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(\lvert a\rvert-\lvert b\rvert)^2-\lvert a-b\rvert^2$

$=a^2-2\lvert ab\rvert+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2\lvert ab\rvert+2ab \leq 0(\because \lvert ab\rvert \geq ab)$

$\therefore\ \lvert a\rvert-\lvert b\rvert \leq \lvert a-b\rvert$: 틀림

㉥ $\lvert a+b\rvert^2-(\lvert a\rvert-\lvert b\rvert)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2\lvert ab\rvert+b^2)$

$=2ab+2\lvert ab\rvert \geq 0$

$\therefore\ \lvert a+b\rvert \geq \lvert a\rvert-\lvert b\rvert$: 맞음

21. $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=2$ 일 때, $ax+by$ 의 최댓값과 $ab+xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

ⅰ) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$\therefore\ -2 \leq ax+by \leq 2$

ⅱ) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2},\quad 1 \geq |ab|$

$\therefore\ -1 \leq ab \leq 1$

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2},\quad 1 \geq |xy|$

$\therefore\ -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore\ -2 \leq ab+xy \leq 2$

ⅰ), ⅱ) 에서, 최댓값의 합은 4

22. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

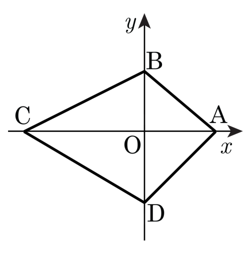
Ⅰ. $a+b+c \geq 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

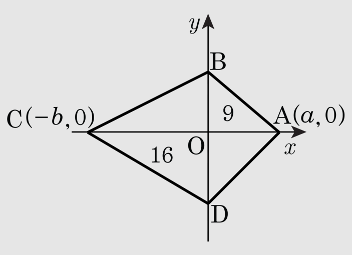
$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

23. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. △OAB와 △OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37　　② 40　　③ 43　　④ 46　　⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

24. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$　　㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
$= f((x+1)+1) = f(x+2)$
$= (x+2)+1 = x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
$= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$ ……㉠

㉠에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right)=12\left(\frac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

26. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ 에 대하여 $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$

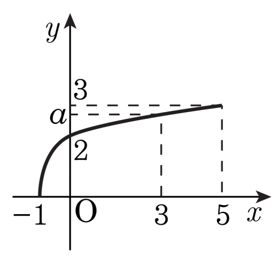
$f_2(x) = f_0(f(x)) = \dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.
즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

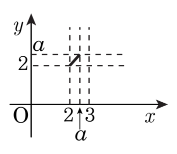
따라서 $f_{100}(x) = f_{3\times 33+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore\ f_{100}(100) = \dfrac{100-1}{100} = \dfrac{99}{100}$

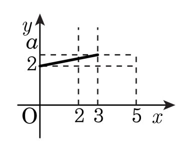
27. 실수 $-1 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는?



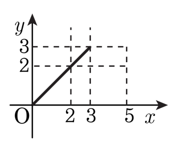
①



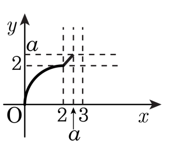
②



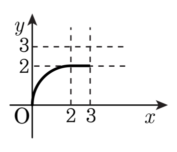
③



④



⑤



해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$이므로 $(f \circ f)\ (x)$ 함수는 $f(f(x))$에서 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는
$y = f(x)\ (0 \le x \le 3\ )$가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

28. 두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

29. $f(5) = 10$, $f(10) = 30$ 이고 $g(x) = ax - 10$ 인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f^{-1} \circ g = f$ 를 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 8$

해설

$f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ f$ 에서

$g = f \circ f \cdots$ ㉠

$g(5) = f(f(5)) = f(10) = 30 \cdots$ ㉡

$\therefore\ 5a - 10 = 30$

따라서 구하는 a 의 값은 8 이다.

30. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며
$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.
이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서
$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면
$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$
$\therefore a=2$
그러므로 $f^{-1}(k)=-4$
$f(-4)=-4+2=k$ $(\because -4<3)$
$\therefore k=-2$