1. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

'역'의 대우인 '이'가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x = 2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x = 5$
③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

2. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

3. 부등식 $7^{20} < n^{10}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50이다.

4. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\ \sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S\ \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}+3(\ \sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\ \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\ \sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\ \sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\ \sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\ \sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\ \sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)

5. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

6. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 2

해설

ⅰ) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$

ⅱ) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$

$\therefore\ y = (f \circ f)(x) = 2$

7. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$ ($\because f(2) = 3$)
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

8. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$

즉 $2kx + k^2 - k = 0$

모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

9. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$
$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

10. 점 $(2,\ 1)$을 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-2)$의 값은?

① -5　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = m(x-2)+1 = mx-2m+1\ (m \neq 0)$ 으로 놓으면

$f(f(x)) = m(mx-2m+1)-2m+1 = x$

$\therefore m^2x-2m^2-m+1 = x$

즉, $m^2 = 1,\ -2m^2-m+1 = 0$이므로

$m = -1$

따라서 $f(x) = -x+3$이고

$f(-2) = -(-2)+3 = 5$ 이다.

11. 두 조건 p, q가 $p\ :|x|<a$, $\ q\ :|x-1|\geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0<a\leq 4$ ② $a>4$ ③ $a\geq 4$
④ $a>2$ ⑤ $2\leq a\leq 4$

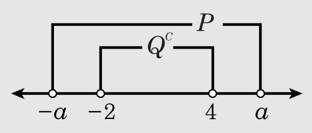
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\}$

$Q^c=\{x|-2<x<4\}$



$-a\leq -2 \rightarrow a\geq 2$, $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

12. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　　② $p \Rightarrow \sim r$　　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \to \sim s, \sim r \to p$

$s \to \sim q, \sim p \to r$

$\therefore \sim q \to \sim p \Rightarrow p \to q$

13. 주머니 속의 빨강, 파랑, 노랑의 서로 다른 색의 구슬 세 개를 차례로 꺼낼 때, 다음 중 단 하나만 참이라고 한다. 다음에서 옳은 것을 고르면?

㉠ 첫번째 구슬은 빨간색이 아니다.
㉡ 두번째 구슬은 파란색이 아니다.
㉢ 세번째 구슬은 파란색이다.

① 첫번째 구슬이 빨간색이다.
② 첫번째 구슬이 파란색이다.
③ 두 번째 구슬이 파란색이다.
④ 세 번째 구슬이 노란색이다.
⑤ 두 번째 구슬이 노란색이다.

해설

㉢이 참이면 ㉡도 참이 되어 모순.
㉠이 거짓이고 ㉡가 참이면 ㉢이 참이 되어 모순 ∴ ㉠이 참이고, ㉡, ㉢이 거짓이다.
∴ 첫번째 구슬이 노란색, 두 번째 구슬이 파란색, 세 번째 구슬이 빨간색이다.

14. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

> a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
> $ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
> $= 2(2mn - m - n) + 1$
> 이때, $2mn - m - n$ 이 $\boxed{}$ 이므로, ab 는 $\boxed{}$ 이다.
> 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 $\boxed{}$ 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역
② 정수, 짝수, 대우
③ 정수, 홀수, 대우
④ 유리수, 짝수, 이
⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
$a = 2m-1, b = 2n-1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab &= (2m-1)(2n-1) = 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \end{aligned}$$

이때, $2mn - m - n$ 이 $\boxed{\text{정수}}$ 이므로 ab 는 $\boxed{\text{홀수}}$ 이다. 이것은 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$ 가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

15. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α,β 는 실수)

① $\alpha\beta<1$ ② $\alpha\beta=-1$ ③ $\alpha\beta=0$

④ $\alpha^2+\beta^2=0$ ⑤ $\alpha^2-\beta^2=0$

해설

$|\alpha-\beta| = |\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta=0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha\beta<1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta<1$ 는 $\alpha\beta=0$ 의 필요조건이다.

16. 다음 중 틀린 것은?

① $a^2+b^2=0$은 $a=b=0$이기 위한 필요조건이다.

② $xy \le 1$ 또는 $x+y \le 2$는 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x=3$은 $x^2-x-6=0$이기 위한 충분조건이다.

④ a, b, c가 실수일 때, $ac=bc$는 $a=b$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x+y$가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우 : $x>1, y>1 \Rightarrow xy>1, x+y>2$ (참)
이 : $xy>1, x+y>2 \nRightarrow x>1, y>1$ (거짓) (반례 : $x=10$, $y=0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
$\therefore$ 충분조건

17. 두 조건 $p : a-4 < x \leq a+5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개　② 7개　③ 8개　④ 9개　⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a+5 \geq 1$, $a-4 < -1$
따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

18. 양수 $a,\ b$가 $a+b=1$을 만족시킬 때, 두 수 $P=a^3+b^3$, $Q=a^2+b^2$의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$　② $P \geq Q$　③ $P = Q$
④ $P < Q$　⑤ $P \leq Q$

해설

$a,\ b$는 양수이고 $a+b=1$이므로
$0 < a < 1,\ 0 < b < 1$
또 $b = 1-a$이므로
$$P = a^3+b^3 = a^3+(1-a)^3$$
$$= a^3+1-3a+3a^2-a^3$$
$$= 3a^2-3a+1$$
$$Q = a^2+b^2 = a^2+(1-a)^2$$
$$= a^2+a^2-2a+1$$
$$= 2a^2-2a+1$$
$$P-Q = 3a^2-3a+1-2a^2+2a-1$$
$$= a^2-a = a(a-1)$$
그런데 $0 < a < 1$이므로 $a(a-1) < 0$
$\therefore P-Q < 0$이고 $P < Q$

19. 다음은 "실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다"는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0\cdots$㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$(다)$0\cdots$㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① <, <, ≥ ② <, <, > ③ <, >, <
④ ≥, ≥, ≤ ⑤ ≥, ≤, ≥

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0\cdots$㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\cdots$㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

20. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때
$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{b}>0,\ \frac{a}{c}>0$

$1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{1\times\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$1+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}},\ 1+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$

$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}}=8$

$\therefore \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\geq 8$

따라서 최솟값은 8

21. 세 양수 a, b, c가 $abc=1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

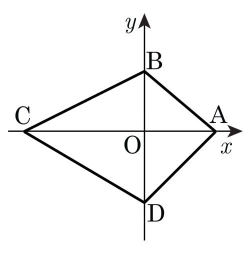
Ⅰ. $a+b+c \ge 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \ge 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \ge 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 8$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

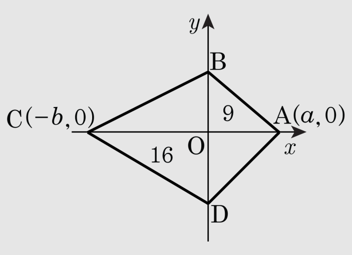
$abc=1$이므로
Ⅰ. $a+b+c \ge 3\times \sqrt[3]{abc}=3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2\times b^2\times c^2}=3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{ab\times bc\times ca}=3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$=abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1$
$\ge 1+3+3+1=8$

22. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. △OAB와 △OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

$(\because\ a>0,\ b>0)$

(□ABCD의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\dfrac{18}{a}+\dfrac{32}{b}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 50+\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{16a}{b}\right)$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

□ABCD$\geq 25+2\cdot\sqrt{\dfrac{9b}{a}\times\dfrac{16a}{b}}=49$

23. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $\ y+z=4-x \cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $\ y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \geq (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \leq 0$
$(3x-2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=3$

24. $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\frac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\frac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\frac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

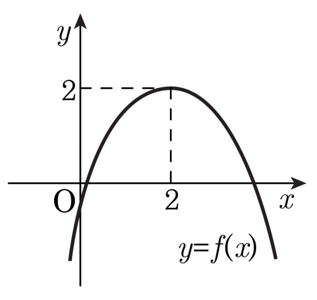
25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여
$f^n(x) = \underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x)$($x$은 자연수) 라 할 때, $f^{2007}(1)$ 의 값은?
(단, 밑줄 그은부분의 f 갯수는 n개)

① 2007 ② 2008 ③ 2009 ④ 4015 ⑤ 4016

해설

$f(x) = x + 2$
$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x+2) + 2 = x + 4$
$f^3(x) = \left(f \circ f^2\right)(x) = f(f^2(x)) = (x+4) + 2 = x + 6$
$f^4(x) = \left(f \circ f^3\right)(x) = f(f^3(x)) = (x+6) + 2 = x + 8$
$\vdots$
$f^n(x) = x + 2n$
$\therefore f^{2007}(1) = 1 + 2 \times 2007 = 4015$

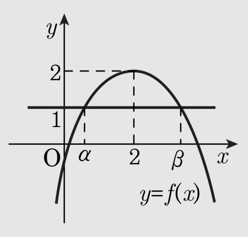
26. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다　　② 1 개　　③ 2 개　　④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

27. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \le x \le 5\}$, $Y = \{y \mid 1 \le y \le 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = ax + b$ 의 역함수가 존재할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일대응이다.
함수 $f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
$f(1) = 1,\ f(5) = 3$
$f(1) = 1$ 에서 $a + b = 1 \cdots$ ㉠
$f(5) = 3$ 에서 $5a + b = 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

28. 함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$　② $3g(x)$　③ $g(3x)$
④ $\frac{1}{3}g(3x)$　⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$ 에서 $f(x)$ 를 y 로 놓고
$y = 4x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면
$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$
이 때, x 와 y 를 바꾸면
$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
또, $f(3x) = 12x - 1$ 에서 $f(3x) = y$ 로 놓고
$y = 12x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면
$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$
$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}g(x)$

29. 두 함수 $f(x) = 4x+1,\ g(x) = 2x+3$ 에 대하여 $\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x + 1,\ g(x) = 2x + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ g \\ &= \left(g \circ g^{-1}\right) \circ f^{-1} \circ g \\ &= f^{-1} \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$4a + 1 = -1$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$

$\therefore \left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(-2) = -\frac{1}{2}$

30. 두 함수 $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$
$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)
$\therefore h = f^{-1} \circ g$
한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면
$x = \frac{1}{2}(y + 1)$
x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$
$h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$
$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$

31. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

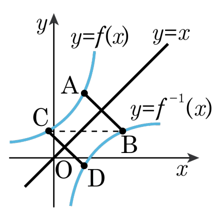
$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k$ $(\because -4<3)$

$\therefore k=-2$

32. 다음 그림은 함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프이다. 점 A의 x좌표가 a일 때, 점 D의 y좌표는?(단, 점선은 x축에 평행하다.)



① $-f^{-1}(a)$　　② $-f(a)$

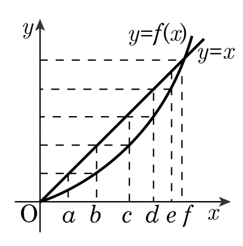
③ a　　④ $f^{-1}(a)$

⑤ $f^{-1}(f^{-1}(a))$

해설

A$(a,\ f(a))$로 놓으면 점 B는
점 A와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 B$(f(a),\ a)$이다.
또, 점 C는 점 B와 y좌표가 같으므로 C$(x,\ a)$로 놓으면 $f(x) = a$이므로
$x = f^{-1}(a)$ $\quad \therefore C(f^{-1}(a),\ a)$
그런데 점 D는 점 C와 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
D$(a,\ f^{-1}(a))$
따라서, 점 D의 y좌표는 $f^{-1}(a)$이다.

33. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$의 그래프이고 직선은 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$이다.)



① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$

④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b$, $(g \circ g)(c) = e$

f와 g는 역함수 관계. 즉 $y = x$에 대칭이다.