1. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2+2x+1=0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

2. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

3. 다음에서 조건 p가 조건q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,a, b 는 실수)

㉠ $p : A \cup B = B,\ q : A \subset B$

㉡ $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$ 이고 $b = 0$

㉢ $p : a^2 = b^2\ q : a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$

$\therefore$ p는 q이기 위한 필요조건

4. 다음 보기 중에서 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

㉡ $p : x > 1$ 이고 $y > 1,\ q : x + y > 2$

㉢ $p : x + |x| = 0,\ q : x < 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분조건
㉢ 필요조건 $p : x + |x| = 0 \rightarrow x \leq 0$

5. 두 조건 $p(x)$: $|x-a| \le 1$, $q(x)$: $-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5$ 에 대하여 $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건일 때, 정수 a 의 개수는?

① 5 개　② 4 개　③ 3 개　④ 2 개　⑤ 1 개

해설

두 조건 $p(x)$, $q(x)$ 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P = \{x|a-1 \le x \le a+1\}$, $Q = \{x|-1 < x < 2,\ 3 \le x \le 5\}$ $p(x)$ 가 $q(x)$ 이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

(i) $-1 < a-1$이고 $a+1 < 2$,

즉 $0 < a < 1 \cdots$ ㉠

(ii) $3 \le a-1$이고 $a+1 \le 5$, 즉 $a = 4 \cdots$ ㉡

㉠ , ㉡ 에서 정수 a는 4뿐이므로 1개이다.

6. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

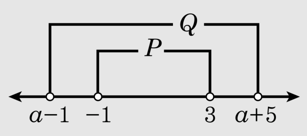
두 조건 p, g 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore\ a \leq -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

7. 두 조건 $p : -1 < x < 3$, $q : a-1 < x < a+5$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이 되기 위해서는 $\{x \mid -1 < x < 3\} \subset \{x \mid a-1 < x < a+5\}$ 이어야 하므로 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면 다음 그림에서 $a-1 \le -1$ 이고 $a+5 \ge 3$



$\therefore -2 \le a \le 0$

따라서, a 의 최댓값은 0, 최솟값은 -2 이므로

$0 + (-2) = -2$

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 $P = \{a+1,\ 2\}$, $Q = \{3,\ 5, 3a-4\}$ 라 할 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 이때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로
$P \subset Q$
$\{a+1,\ 2\} \subset \{3,\ 5,\ 3a-4\}$
따라서 $3a-4=2$ 이므로 $a=2$

9. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

10. $x > 0,\ y > 0$일 때, $\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x > 0,\ y > 0$이므로

$\left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + 12y\right) = 3 + 36xy + \frac{1}{xy} + 12$

$= 15 + 36xy + \frac{1}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{36\frac{1}{xy} \cdot xy} + 15 = 27$

11. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로

$\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)=16\cdot\frac{x}{y}+2xy+\frac{8}{xy}+\frac{y}{x}$에서

$16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\cdot\sqrt{16\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=8$

$2xy+\frac{8}{xy}\geq 2\cdot\sqrt{2xy\cdot\frac{8}{xy}}=8$

$\therefore 16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy+\frac{8}{xy}\geq 16$

12. $a>0,\ b>0$일 때, $(a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 13 ② 24 ③ 25 ④ 28 ⑤ 36

해설

$a>0,\ b>0$이므로 산술기하평균의 관계로부터

$(a+b)\cdot\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)=4+\dfrac{9a}{b}+\dfrac{4b}{a}+9$

$\dfrac{9a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{9a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=2\cdot 6=12$

$\therefore (a+b)\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)\geq 12+13=25$

13. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

14. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy=2 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $-1<0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$' 은 거짓이다.

15. 두 조건 p, q가 p : $|x| < a$, q : $|x-1| \geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a \leq 4$ ② $a > 4$ ③ $a \geq 4$

④ $a > 2$ ⑤ $2 \leq a \leq 4$

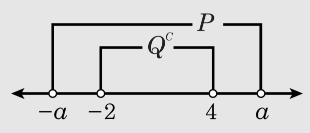
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P = \{x \mid -a < x < a\}$

$Q = \{x \mid x \leq -2$ 또는 $x \geq 4\}$

$Q^c = \{x \mid -2 < x < 4\}$



$-a \leq -2 \rightarrow a \geq 2$, $a \geq 4$

$\therefore a \geq 4$

16. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$ ② $p \Rightarrow \sim r$ ③ $r \Rightarrow q$
④ $r \Rightarrow s$ ⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

17. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. ‘카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.’ 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시확인해야할 필요가 있는 것은?

$\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{k}$ $\boxed{u}$

① $\boxed{7}$ $\boxed{u}$

② $\boxed{7}$ $\boxed{k}$

③ $\boxed{2}$ $\boxed{u}$

④ $\boxed{2}$ $\boxed{k}$

⑤ $\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{k}$ $\boxed{u}$

해설

주어진 규칙의 대우는 ‘한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.’ 이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

18. 다음은 명제 '$3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

> … (생략) …
> m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$이므로, $n^2 + 1$은 3의 배수이다.
> 한편, 정수 n이 어떤 정수 k 에 대하여
> $n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
> $n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
> $n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
> 따라서 n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
> … (생략) …

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.

② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.

③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.

④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.

⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$은 3 의 배수이다. ⋯ ㉠
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ 이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ⋯ ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

19. 다음 중 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ?

① $p : a+b>0,\ ab>0,\ q : a>0,\ b>1$

② $p : \frac{a}{b}>1,\ q : a>b>1$($a,\ b$ 는 실수)

③ $p : a+b>2$, $q : a \geq 1$ 또는 $b \geq 1$ (a, b는 실수)

④ $p : ab=0,\ |a|+|b|=0$

⑤ $p : a+b \geq 2,\ ab \geq 1,\ Q : a \geq 1,\ b \geq 1$

해설

① 반례 : $a=2+i,\ b=2-i$ 이면
$a+b=4>0,\ ab=5>0$
∴ 필요조건
② 반례 : $a=-2,\ b=-1$ 이면
$\frac{a}{b}=\frac{-2}{-1}=2>1$
∴ 필요조건

20. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = U$　③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$　⑤ $A = B^c$

해설

$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

21. 세 조건 p, q, r를 만족하는 진리집합이 각각 $P = \{x \mid x \le -2, 1 \le x \le 5\}$, $Q = \{x \mid x \le a\}$, $R = \{x \mid x \le b\}$이다. p는 q이기 위한 필요조건이고, r이기 위한 충분조건이 되도록 상수a, b에 대한 a의 최댓값을 M, b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

p 가q 이기 위한 필요조건, r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P \subset R$ 이 성립한다.
따라서 $a \le -2, b \ge 5$ 이므로 a 의 최댓값은 -2, b 의 최솟값은 5
$\therefore -2 + 5 = 3$

22. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$ ② $Q \subset P$ ③ $Q - P = \phi$
④ $P - Q = P$ ⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면,$P \subset Q^c$ 이다.
즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

23. 세 조건 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q,\ r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　② $q \Rightarrow r$　③ $p \Rightarrow r$
④ $\sim q \Rightarrow p$　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$
$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$
$\therefore\ r \Rightarrow p$
따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.

24. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$
④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$

$\therefore\ c < b$

$\therefore\ a > b > c$

25. $0 < a < b,\ a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1, \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}, \quad \sqrt{b}-\sqrt{a}, \quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$
② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$
④ $\sqrt{b-a} < 1$
⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

26. $x,\ y$ 가 실수일 때, 다음 중 절대부등식이 아닌 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x+1>0$	㉡ $x^2+xy+y^2 \geq 0$
㉢ $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$	㉣ $\lvert x+y\rvert \geq \lvert x-y\rvert$

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x>-1$ 일 때만 성립한다.
㉡ $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$
(단, 등호는 $x=y=0$ 일 때 성립)
㉢ $(\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2-\lvert x-y\rvert^2$
$=\lvert x\rvert^2+2\lvert x\rvert\lvert y\rvert+\lvert y\rvert^2-(x-y)^2$
$=2(\lvert xy\rvert+xy) \geq 0$
$\therefore (\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)^2 \geq \lvert x-y\rvert^2$
(단, 등호는 $xy \leq 0$ 일 때 성립)
㉣ (반례) $x=2, y=-3$ 일 때
$\lvert 2+(-3)\rvert=1, \lvert 2-(-3)\rvert=5$ 이므로
$\lvert x+y\rvert<\lvert x-y\rvert$
따라서 절대부등식이 아닌 것은 ㉠, ㉣ 이다.

27. 다음 등식을 이용하여 증명할 수 있는 부등식은?

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

① $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

② $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \le |a|+|b|+|c|$

③ $\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

④ $a^2+b^2+c^2 \le (a+b+c)^2$

⑤ $a+b+c \ge 3^3\sqrt{abc}$

해설

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$ 이므로

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

③의 경우 양변을 제곱하여 빼면

$3(a^2+b^2+c^2)-|a+b+c|^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$

$\therefore \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge |a+b+c|$

28. $a > 0,\ b > 0$일 때, 다음 네모 속에서 옳은 것은 모두 몇 개인가?

Ⅰ. $1 + a > \sqrt{1 + 2a}$
Ⅱ. $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
Ⅲ. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$
Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$
Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b}\right) \geq 4$
Ⅵ. $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 25$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

Ⅰ. $(1+a)^2 - (\sqrt{1+2a})^2$
$= a^2 > 0\ (\because a > 0)$

$\therefore (1+a) > \sqrt{1+2a}$ (○)
Ⅱ. $(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a+b+2\sqrt{ab})$
$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
$\therefore \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (○)

Ⅲ. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \dfrac{1}{a}} = 2$ (○)

Ⅳ. $\dfrac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \dfrac{-\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$= \dfrac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0$

$\therefore \dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ (○)

Ⅴ. $(a+b)\left(\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b}\right) = 4 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a}$

$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b} \times \dfrac{2b}{a}} = 4$

$\therefore 4 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2b}{a} \geq 8$ (×)

Ⅵ $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = 17 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a}$

$\dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a} \geq 2\sqrt{\dfrac{2a}{b} \times \dfrac{8b}{a}} = 8$

$\therefore (2a+b)\left(\dfrac{8}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = 17 + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{8b}{a} \geq 25$ (○)

29. $a^2+b^2=2,\ x^2+y^2=2$일 때, $ax+by$의 최댓값과 $ab+xy$의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

ⅰ) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

$\therefore\ -2 \leq ax+by \leq 2$

ⅱ) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2},\quad 1 \geq |ab|$

$\therefore\ -1 \leq ab \leq 1$

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2},\quad 1 \geq |xy|$

$\therefore\ -1 \leq xy \leq 1$

$\therefore\ -2 \leq ab+xy \leq 2$

ⅰ), ⅱ)에서, 최댓값의 합은 4

30. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a + b + c \geq 3$
Ⅱ. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$
Ⅲ. $ab + bc + ca \geq 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

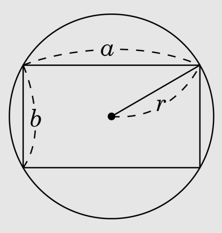
해설

$abc = 1$이므로
Ⅰ. $a + b + c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab + bc + ca) + (a + b + c) + 1$
$\geq 1 + 3 + 3 + 1 = 8$

31. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\mathrm{cm}^2)$　② $r^2(\mathrm{cm}^2)$　③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$
④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$　⑤ $\dfrac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



$a^2+b^2=(2r)^2$
산술기하평균의 관계에 의해
$a^2+b^2 \ge 2\sqrt{(ab)^2}$
$4r^2 \ge 2(ab)$
$ab \le 2r^2$,
(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$

32. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$　　② $a=2b$　　③ $a=b$

④ $a^2=b$　　⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

33. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$을 만족하는 실수 $x,\ y, z$에 대하여 x가 취할 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x+y+z=4$에서 $y+z=4-x \cdots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=6$에서 $y^2+z^2=6-x^2 \cdots$ ㉡
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \ge (y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
㉠, ㉡을 대입하면
$2(6-x^2) \ge (4-x)^2,\ 3x^2-8x+4 \le 0$
$(3x-2)(x-2) \le 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \le x \le 2$
따라서 $M=2,\ m=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{M}{m}=3$