1. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$
$\therefore\ x = 2,\ y = 4$
$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로
$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$
$y^2 - 8y + 16 \leq 0$
$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$
준식에 대입하면 $x = 2$
따라서 $x + y = 6$

2. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$의 두 근, α, β는 서로소이다. 이때, 실수 m의 값은? (단, α, β 는 $\alpha > 1$, $\beta > 1$인 자연수)

① 10 ② 20 ③ 35 ④ 55 ⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = 91$
α와 β가 서로소이고 자연수이므로
$(\alpha, \beta) = (1, 91)$ 또는 $(7, 13)$ 이다.
여기서 $\alpha > 1$, $\beta > 1$이므로
$(\alpha, \beta) = (7, 13)$
$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

3. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면

$t=(x-1)^2+1\geq 1$ 이고

$f(x)=g(t)=t(t+1)+3t-6$

$=t^2+4t-6$

$=(t+2)^2-10\ (t\geq 1)$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

4. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -2

▷ 정답: 2

해설

두 수를 각각 $x,\ x+4$라 하면

$y = x^2 + (x+4)^2$

$= 2x^2 + 8x + 16$

$= 2(x+2)^2 + 8$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x = -2,\ x+4 = 2$

따라서 구하는 두 수는 $-2,\ 2$

5. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

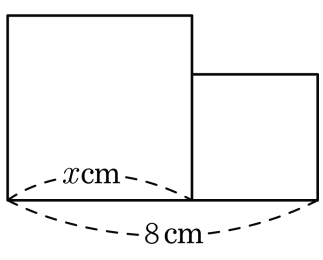
$\therefore \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq \dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

6. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



① $x=2, y=12$ ② $x=2, y=14$ ③ $x=2, y=16$

④ $x=4, y=32$ ⑤ $x=4, y=34$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64 \\ &= 2(x-4)^2 + 32 \end{aligned}$$

따라서 $x=4$ 일 때 $y=32$ 이다.

7. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ·····㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ·····㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ·····㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ·····㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

8. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20 %증가하였고, B제품은 25 %증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

9. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

> (가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
> (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10$, $\frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

10. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x + y = 200$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분

$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}$/분$= \frac{0.4\,\text{km}}{3} \times 60$/시간$= 8\,\text{km/h}$

11. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α,β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,

$-(x+1)-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)

ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=0$

ⅲ) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $x=0,\ 4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

12. 두 양의 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})-2=0$

$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$

$2t^2+t-2=0$

근의 공식에 대입하면

$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ (t>0)\ \frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

13. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1 + k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1 + k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>

14. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개

④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

15. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ −1 ④ 5 ⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

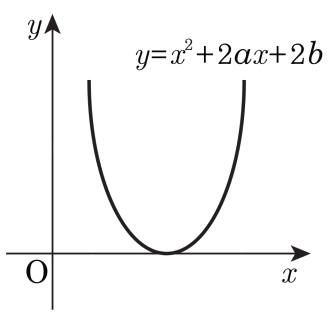
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

16. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17. $2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$
$= 2x^2 - (3y + 3)x + my^2 + y + 1$
이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로
$D = (3y + 3)^2 - 8(my^2 + y + 1)$
$= 9y^2 + 18y + 9 - 8my^2 - 8y - 8$
$= (9 - 8m)y^2 + 10y + 1$
여기서 $D/4 = 25 - (9 - 8m) = 0$이어야 하므로
$25 - 9 + 8m = 0$
$8m = -16$
$\therefore m = -2$

18. 방정식 $3x^2+5x-2=0$의 두 근을 α,β라 하고 방정식 $5x^2+4x+3=0$의 두 근을 γ,δ라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\delta\beta}+\dfrac{1}{\delta\alpha}$의 값은?

① $-\dfrac{10}{3}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

$\alpha+\beta=-\dfrac{5}{3}$, $\alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$, $\gamma+\delta=-\dfrac{4}{5}$, $\gamma\delta=\dfrac{3}{5}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}\\
&=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)\\
&=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right)\\
&=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}\times\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$ ② $x^2+5x-3=0$

③ $x^2-5x+1=0$ ④ $x^2+6x-1=0$

⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

$\alpha\beta=1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore$ $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

20. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$　② $2 \le m < 3$　③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \le 3$　⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0,\ (m-2)(m+1) \ge 0$

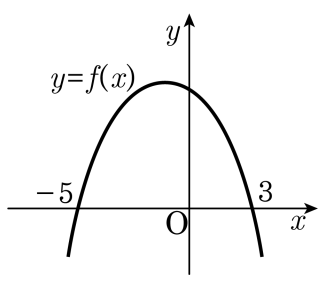
$\therefore\ m \le -1,\ m \ge 2$

(ii) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(iii) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2 \le m < 3$

21. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

22. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로
$2m$만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
$\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
$2m + 6 > 0$
$\therefore\ m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

23. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2)$, $Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

24. $x+y=3$ 일 때 $x-y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$x+y=3 \rightarrow y=-x+3$

$$\begin{aligned} x-y^2 &= x-(-x+3)^2 \\ &= x-(x^2-6x+9) \\ &= -x^2+7x-9 \\ &= -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{13}{4} \end{aligned}$$

25. $x=2$ 일 때 최솟값 -1을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\begin{aligned} y &= a(x-2)^2-1 \\ &= a(x^2-4x+4)-1 \\ &= ax^2+4ax+4a-1 \end{aligned}$$

$4a-1=3$

$a=1$

$y=(x-2)^2-1$

$apq=1\times 2\times(-1)=-2$

26. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

27. $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$
이 때, $x,\ y$ 가 실수이므로
$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.

28. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　② 7 초 후　③ 8 초 후
④ 10 초 후　⑤ 알 수 없다

해설

$y = 50t - 5t^2$
$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$
$= -5(t-5)^2 + 125$
따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

29. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

30. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(ⅰ) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$
따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ⅱ) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

31. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$

$\alpha^2+3\alpha+p=0$

$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$

$\alpha=1$ or $p=3$

$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$

$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$

$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

32. $x,\ y$가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x,y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$
$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$
따라서
$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$
$x-2=2,\ y-1=2$일 때, $x=4,\ y=3$
$x-2=4,\ y-1=1$일 때, $x=6,\ y=2$
$x-2=-1,\ y-1=-4$일 때, $x=1,\ y=-3$
$x-2=4,\ y-1=-1$일 때, $x=6,\ y=0$
$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$
따라서 순서쌍은 $(3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (1,\ -3),$
$(6,\ 0),(3,\ 5)$로 모두 6개이다.

33. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ②\end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$