1. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$
② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$
④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

2. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

3. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0
④ 1 ⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

4. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
양변에 $x = 2, -2, 1$을 각각 대입하면
$0 = 1 + a + b + c,\ 0 = -27 + 9a - 3b + c,\ -9 = c$
세 식을 연립하여 풀면 $a = 5,\ b = 3,\ c = -9$
$\therefore\ a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
$= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\} + b] + c$

1	1	2	−4	−8		
		1	3	−1		
1	1	3	−1	$\boxed{-9}$	←	c
		1	4			
1	1	4	$\boxed{3}$	←	b	
		1				
	1	$\boxed{5}$	← a			

$\therefore\ a(b+c) = 5(3-9) = -30$

5. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

x^3+ax^2+bx+3
$=(x^2+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2+x+c$
$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$
따라서 $a=3,\ b=1$

6. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4\cdot(2x-1)^7$
$=a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4\cdot(2-1)^7=2^4=16$

7. 두 다항식 $f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a=-2$

해설

$f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$에서
$f(-2)=g(-2)$이므로
$4-6+a=-8-2a$
$\therefore\ a=-2$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

9. x에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$를 $x + 1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a = 3$　　② $b = 2$　　③ $c = -1$
④ $d = -3$　　⑤ $k = -1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k = -1$, $c = -1$, $d = -a+1$, $b-a+1 = -1$, $-b+a = 2$ 이므로

$k = -1$, $c = -1$, $a = 4$, $b = 2$, $d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

10. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

11. $\left(125^2-75^2\right) \div \{5+(30-50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75 ② 125 ③ 900 ④ 1000 ⑤ 1225

해설

$125^2-75^2=(125+75)(125-75)$

$=200\times 50=10000$

$5+(30-50)\div(-4)=5+5=10$ 이므로

(준 식)$=10000\div 10=1000$

12. 합이 $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ 이고, 최소공배수가 $x^4 - 3x^2 + 2x$ 인 두 식을 $f(x), g(x)$ 라 할 때, $f(2) \times g(2)$ 의 값을 구하면?

① 12　② 22　③ 26　④ 32　⑤ 36

해설

$f(x) = Ga,\ g(x) = Gb$ (단, a, b : 서로소)
$f(x) + g(x) = G(a+b)$
$= (x-1)(x+2)(2x-1) \cdots$ ㉠
$L = Gab = x(x-1)^2(x+2)$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+b$와 ab가 서로소이므로
$G = (x-1)(x+2)$
$\therefore f(x)g(x) = LG = x(x-1)^2(x+2)(x-1)(x+2) = x(x-1)^3(x+2)^2$
$\therefore\ f(2)g(2) = 32$

13. x 에 대한 이차식 $A = x^2 + ax + b$, $B = x^2 + bx + a$ 의 최대공약수 G 가 x 에 대한 일차식이고 $A + B = G(px + q)$ 일 때, 상수 $a + b + p + q$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

G 는 $A + B, A - B$ 의 인수가 된다.

$A - B = (a - b)x - (a - b) = (a - b)(x - 1)$

$\therefore\ G = x - 1$

A 에 $x = 1$ 대입,

$1 + a + b = 0$, $a + b = -1$

$$\begin{aligned} A + B &= 2x^2 + (a + b)x + a + b \\ &= 2x^2 - x - 1 \\ &= (x - 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

$p = 2,\ q = 1$

$a + b + p + q = -1 + 2 + 1 = 2$

14. $a = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^{100}$ 의 값을 구하면?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$a = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$a + a^2 + a^3 + a^4 = i - 1 - i + 1 = 0$ 이고

$\therefore (a + a^2 + a^3 + a^4) + \cdots + (a^{97} + a^{98} + a^{99} + a^{100}) = 0$

15. 다음 방정식을 풀면?

$$(2-\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-1=0$$

① $x=-1$ 또는 $-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $-2+\sqrt{3}$
③ $x=-1$ 또는 $2+\sqrt{3}$
④ $x=1$ 또는 $2-\sqrt{3}$
⑤ $x=1$ 또는 $=2+\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2+\sqrt{3}$ 을 곱하면
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$(x+1)\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

16. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 $20\,\mathrm{m}$이고 대각선의 길이가 $3\,\mathrm{m}$일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2인가?

① $12\,\mathrm{m}^2$ ② $13\,\mathrm{m}^2$ ③ $14\,\mathrm{m}^2$ ④ $15\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $16\,\mathrm{m}^2$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$4(a+b+c)=20,\ a+b+c=5$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ a^2+b^2+c^2=9$

$$\begin{aligned}(\text{겉넓이}) &= 2(ab+bc+ca)\\ &= (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\ &= 25-9=16(\mathrm{m}^2)\end{aligned}$$

17. $x^{113}+1$을 x^3+x로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하자. 이때, $R(2006)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$x^{113}+1=(x^3+x)Q(x)+R(x)$
$=x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
항등식이므로 $x=0, x^2=-1$을 각각 대입하면,
$1=c,\ x+1=-a+bx+c$
$\therefore a=0,\ b=1$
$\therefore R(x)=x+1$
따라서 $R(2006)=2007$

18. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나누면 나머지가 12이다. 또 $f(x)-g(x)$를 $x^2+3x-15$로 나누면 나머지가 -2이다.
이때, $f(x)$를 $x^2+3x-15$으로 나눈 나머지는?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 24

해설

$f(x)+g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_1(x)+12\cdots$ ㉠
$f(x)-g(x)=\left(x^2+3x-15\right)Q_2(x)-2\cdots$ ㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+10$
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+3x-15\right)\left(Q_1(x)+Q_2(x)\right)+5$$
$\therefore$ 나머지는 5

19. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $\left[x^2,\ x-1\right] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\left[x^2,\ x-1\right] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3+x^2+4x+10)$
$= (x-a)(x^3+x^2+bx+c)$
따라서, $a=1,\ b=4,\ c=10$이므로
$a+b+c=15$

20. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.
따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣ $$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

21. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$z^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
$$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$$
$$=\left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$$
$$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$$

해설

$$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4z^2+4z+1=-3$
$\to 4z^2+4z+4=0$
$\to z^2+z+1=0$
$\to (z-1)(z^2+z+1)=0$
$\to z^3-1=0$
$\to z^3=1$
※방정식에 익숙한 학생들은
$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.
$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$
$=10z^4+12x^3+10z^2$
$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$
$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$
$=0+2$
$=2$

22. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\cdots\cdots\,\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k+2} = \sqrt{1}\cdot i^2 = -1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k}$
$= 1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

23. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

조건에서

$1 + 3a + b = 0 \cdots$ ㉠

$1 - a + c = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$

$\therefore\ b - c = -4a$

$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

24. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4} = k^2 - 6k < 0,\ \ k(k-6) < 0$

$\therefore\ 0 < k < 6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega + \overline{\omega} = -2k,\ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로

$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$

$= 4k^2 - 12k$

$4k^2 - 12k = 16,$

즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$ 에서

$(k+1)(k-4) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$ 또는 $k = 4$

$0 < k < 6$ 이므로 $k = 4$

25. $x^2-x+1=0$ 의 두 근을 α,β라 하면 $f(\alpha)=\beta+1,\ f(\beta)=\alpha+1$을 만족하는 이차항의 계수가 1인 이차의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1\ (\alpha\neq\beta)$
$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면
$f(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta+1$
$f(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha+1$
$f(\alpha)-f(\beta)=\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$
$\alpha\neq\beta$ 이므로 양변을 $\alpha-\beta$ 로 나누면
$\alpha+\beta+a=-1\quad\therefore a=-2\ (\because \alpha+\beta=1\ )$
$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+b=\beta+1$
$f(\beta)=\beta^2-2\beta+b=\alpha+1$
$f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta+2$
$1-2-2+2b=3\quad\therefore b=3$
$\therefore f(x)=x^2-2x+3$
$\quad f(1)=2$