

1. 방정식 $(k^2 - 3)x + 1 = -k(2x - 1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1 , 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$$(k^2 + 2k - 3)x = k - 1, \quad (k - 1)(k + 3)x = k - 1$$

$k = 1$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ (부정)

$$\therefore k_1 = 1$$

$k = -3$ 일 때, $0 \cdot x = -4$ (불능)

$$\therefore k_2 = -3$$

$$\therefore k_1 + k_2 = -2$$

2. $1 < x < 3$ 인 x 에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$ 의 해를 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2

② $1 + \sqrt{2}$

③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$

⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$ 일 때, $[x] = 1$

준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 만족하는 해가 없다.

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$

준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$

그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 만족하는 해는

$x = 1 + \sqrt{3}$

3. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0, D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

4. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 &= 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

6. x 에 대한 다항식 $(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) - 4$ 를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① $x^2 - 2$

② $x^2 + 2$

③ $x^2 - 4x + 2\sqrt{2} - 4$

④ $x^2 + 4x + 2\sqrt{2}$

⑤ $4x - 4$

해설

$x^2 - 2x = t$ 로 치환할 때,

$$t^2 + 3t - 4$$

$$= (t + 4)(t - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

$$(\because x^2 - 2x + 4 \text{의 } \frac{D}{4})$$

인수의 합은

$$(x^2 - 2x + 4) + (x - 1 - \sqrt{2}) + (x - 1 + \sqrt{2}) = x^2 + 2$$

7. 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 이고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 일 때, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때 $a < 0$ 이고,
 $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ax^2 + ax - 6a \geq 0$

$\therefore b = a, c = -6a$

따라서, $f(x) = ax^2 + ax - 6a$ 이므로

$f(x) = 0$ 의 두 근은 $-3, 2$ 이다.

즉, $f(-3) = 0$ 또는 $f(2) = 0$ 이다.

한편, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는
방정식 $f(3x - 2) = 0$ 의 실근과 같으므로

$f(3x - 2) = 0$ 의 두 근은

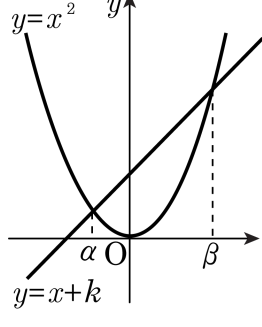
$3x - 2 = -3$ 또는 $3x - 2 = 2$ 에서

$x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

8. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ $\alpha + \beta = 1$ ㉡ $k > 0$ ㉢ $\alpha\beta = -k$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1 \cdots (\text{참})$$

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 + 4k > 0$ 에서 $k > -\frac{1}{4} \cdots (\text{거짓})$

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -k \cdots (\text{참})$$

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

9. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{2}(x+2)(x-6) \\&= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x - 12) \\&= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 \\x &= 2 \text{ 일 때 최댓값은 } 8 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 4가 되었다. 이 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$y = 2(x^2 - 2x + 1) + k - 2 = 2(x - 1)^2 + k - 2$$

$y = 2(x - 1)^2 + k - 2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 식은

$$y = 2(x - 1)^2 + k - 2 + 1 \text{ 이다.}$$

최솟값이 4 가 되었으므로 $k - 1 = 4$ 이다.

$$\therefore k = 5$$

11. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 일 때, 최대이고

최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$

$$\therefore k = 2$$

따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로

$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -1, f(2) = 2$

이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값

-1을 갖는다.

12. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

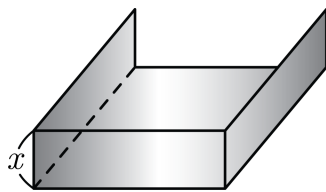
해설

$$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$$

$$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

따라서 m 의 최댓값은 1이다.

13. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(60 - 2x) \\ &= -2x^2 + 60x \\ &= -2(x^2 - 30x + 225 - 225) \\ &= -2(x - 15)^2 + 450 \end{aligned}$$

$x = 15$ 일 때, 최대 넓이 450

14. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채
꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

- ① $\frac{15}{2}$ m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$ m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\text{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\text{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}\text{m}$ 일

때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}\text{m}^2$ 을 가진다.

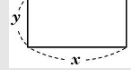
15. 가로 길이가 세로 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로 길이와 세로 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x , y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{A}$
 $4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{B}$ 식 $+2 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$
 $\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$
 $\textcircled{B}$: $3x = y$ 를 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7x^2 = 7 \quad x = 1(x > 0), \quad y = 3$
 $\therefore x + y = 4$
 $\textcircled{B}$: $2x = 3y$ 를 $4 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
 $\therefore x + y = 5$
 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = 4$
 $\therefore a - b = 1$

17. 방정식 $2x + 5y = 84$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 의 해 중에서 x 의 최댓값을 구하면?

① 36

② 37

③ 38

④ 39

⑤ 40

해설

준식을 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \dots\dots\text{㉠}$$

㉠에서 y 가 양의 정수이므로 $42 - x$ 가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2, 7, \dots, 37$

$\therefore x$ 의 최댓값은 37

18. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것을 모두 고르면?(단, x, y 는 실수)

보기

㉠ $x^2 \geq 0$

㉡ $x^3 \geq 0$

㉢ $|x| + |y| > 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 항상 성립한다. $\therefore$ 참

㉡ [반례] $x = -1$ 일 때, $x^3 < 0 \therefore$ 거짓

㉢ [반례] $x = 0, y = 0$ 일 때, $|x| + |y| = 0 \therefore$ 거짓

19. 임의의 양의 실수 x 에 대하여, x 를 넘지 않는 소수의 개수를 $f(x)$ 라 하자. 예를 들면, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, $f(5) = 3$ 이다. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ $f(10) = 4$
- ㉡ 임의의 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) < x$ 이다.
- ㉢ 임의의 양의 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x)$ 이다.

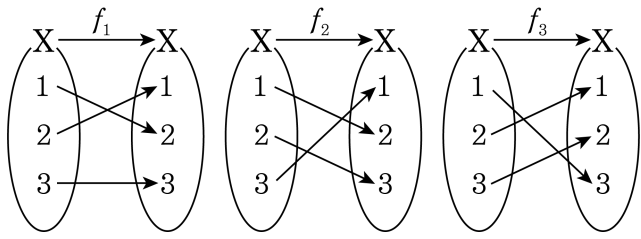
- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ 10을 넘지 않는 소수는 2, 3, 5, 7 이므로 $f(x) = 4$ 따라서 옳다.
- ㉡ $f(x)$ 는 x 를 넘지 않는 소수의 개수이므로 $[x]$ 보다 작다.
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)
 $f(x) < [x] \leq x$
 $\therefore f(x) < x$
따라서, 옳다.
- ㉢ 옳지 않다.
< 반례 > $x = 2$, $f(2+1) = f(3) = 2$, $f(2) = 1$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 X 로의 일대일대응 f_1, f_2, f_3 가 다음과 같다.

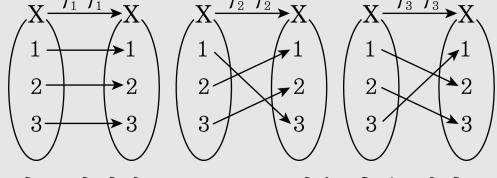
이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$ 와 같은 것은?



- ① f_1
- ② f_2
- ③ f_3
- ④ $f_1 \circ f_1$
- ⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면



위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

21. 함수 $f(x) = 2x - a$ 에 대하여 $(f \circ f)(1) = -5$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(f(1)) = f(2 - a) = 2(2 - a) - a = 4 - 3a$$

$$(f \circ f)(1) = -5 \text{ 에서 } 4 - 3a = -5$$

$$\therefore a = 3$$

22. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

23. 두 함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 가 $f(h(x)) = g(x)$ 를 만족시킨다. 이 때 $h(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$$f(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+2} = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$$

$$(x-1)\{h(x)-1\} = (x+1)\{h(x)+2\}$$

$$2h(x) = -3x - 1$$

$$\therefore h(x) = \frac{-3x-1}{2}$$

$$\therefore h(2) = -\frac{7}{2}$$

해설

$f(h(2)) = g(2)$ 에서, $h(2) = a$ 라 두면, $g(2) = 3$ 이므로

$$f(a) = 3, \frac{a-1}{a+2} = 3$$

$$\text{이를 풀면 } \therefore a = h(2) = -\frac{7}{2}$$

24. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f, g 가 각각 $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(f \circ g^{-1})(k) = 2$ 를 만족하는 실수 k 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$(f \circ g^{-1})(k) = 2 \text{ 에서 } f(g^{-1}(k)) = 2$$

$$g^{-1}(k) = t \text{ 로 놓으면 } f(t) = 2$$

$$3t - 4 = 2$$

$$\therefore t = 2$$

$$\text{따라서 } g^{-1}(k) = 2 \text{ 이므로 } g(2) = k$$

$$\therefore k = g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

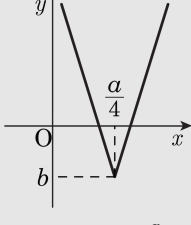
25. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4\left(x - \frac{a}{4}\right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

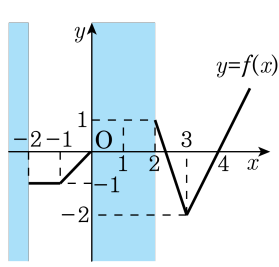


따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

26. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$ 에 대한 설명이다. M, N 의 합을 구하여라.



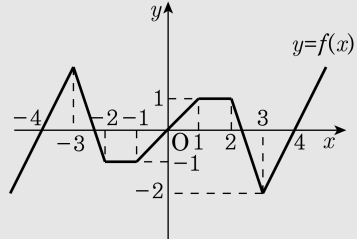
$-4 \leq x \leq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 M 이고, $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 N 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $M = 2$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $N = 1$ 이다.
 $\therefore M + N = 3$

27. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$y = a(x - 1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$$

$$a - 1 = 3, a = 4$$

$$y = 4(x - 1)^2 - 1$$

$$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$$

28. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
 $x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$
 $\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$
 $\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$
 $\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -5 \leq y \leq 1$
 $\therefore y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

29. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots$ ①
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ 이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

30. 지성은 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’ 라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

- ㉠ 키가 180cm인 학생의 몸무게

㉡ 키가 170cm인 학생의 몸무게

㉢ 몸무게가 70kg인 학생의 키

㉣ 몸무게가 60kg인 학생의 키

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉣

해설

지성의 결론 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성의 결론이 참이면 결론의 대우 ‘몸무게가 65kg 미만인 학생의 키는 175cm 미만이다.’도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.

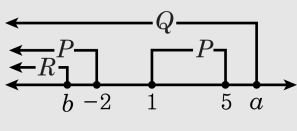
∴ ㉠, ㉣

31. 세 조건 $p: x \leq -2$ 또는 $1 \leq x \leq 5$, $q: x \leq a$, $r: x \leq b$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, p 는 r 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① a 의 최댓값은 -2 이고, b 의 최솟값은 5 이다.
 - ② a 의 최솟값은 -2 이고, b 의 최댓값은 5 이다.
 - ③ a 의 최댓값은 5 이고, b 의 최솟값 -2 이다.
 - ④ a 의 최솟값은 5 이고, b 의 최댓값은 -2 이다.
 - ⑤ a, b 의 최댓값, 최솟값은 존재하지 않는다.

해설

$$p \rightarrow q, P \subset Q$$

$$r \rightarrow p, R \subset P$$



$$\therefore b \leq -2 \text{ 그리고 } a \geq 5$$

a 의 최솟값은 5 이고 b 의 최댓값은 -2 이다.

32. 이차방정식 $x^2 - 4x + 4a = 0$ (a 는 실수) 이 허근을 가질 때, $a - 1 + \frac{9}{a - 1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4 - 4a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

$$\therefore (a - 1) + \frac{9}{(a - 1)} \geq 2\sqrt{(a - 1) \cdot \frac{9}{(a - 1)}} = 6$$

따라서 최솟값은 6

33. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 12개

해설

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $X, Y \subset U, X \cup Y = U,$

$X \cup Y = \emptyset$ 이다.

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$
$$n(X \cup Y) = n(U) = 4. \quad X \cup Y = \emptyset \text{ 이므로}$$
$$h(X \cup Y) = h(U) = 4,$$
$$n(X) + n(Y) = 4 \circ |1$$
$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$
$$\mathbf{v}_-$$
$$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$
의 6 가

기며