1. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ 가장 작은 소수는 1 이다.

㉡ 소수는 약수가 2 개인 수이다.

㉢ 자연수는 소수와 합성수로 이루어져 있다.

㉣ a, b 가 소수이면 $a \times b$ 도 소수이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ 가장 작은 소수는 2 이다.
㉢ 자연수는 1, 소수, 합성수로 이루어져 있다.
㉣ a, b 가 소수일 때, $a \times b$ 의 약수는 1, a, b, $a \times b$ 이므로 $a \times b$ 는 소수가 아니다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

2. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 150

해설

$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a$, $180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b$,
위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,
$a = 2 \times 3 \times 5$, $b = 5^3$ 이어야 한다.
따라서,
$c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$
$\therefore c = 150$

3. 소인수분해를 이용하여 72 의 약수를 구하기 위해 만든 것이다. 빈칸에 알맞은 수를 모두 구해 그 합을 구하여라.

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	
3	3		12	24
3^2		18	36	72

▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

$8 + 6 + 9 = 23$

4. 세 수 250, 360, 960 의 최대공약수는?

① 2^2 ② 2×5 ③ $2^2 \times 5^2$
④ $2 \times 3 \times 5$ ⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$250 = 2 \times 5^3$, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$,
$960 = 2^6 \times 3 \times 5$ 이므로
최대공약수는 2×5

5. A_k 는 k 의 배수 모임이라고 하면 A_{12} 는 12 의 배수 모임, A_{18} 은 18 의 배수 모임이다. A_{12} 와 A_{18} 의 공통인 수들의 모임을 A_n 이라고 할 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

A_{12} 는 12 의 배수 $\Rightarrow$ 12, 24, 36, $\cdots$,
A_{18} 은 18 의 배수 $\Rightarrow$ 18, 36, 54, $\cdots$ 이므로
A_{12} 와 A_{18} 의 공통인 수들의 모임은 $\Rightarrow$ 36, 72, 108, $\cdots$ 이다.
36, 72, 108, $\cdots$ 는 36 의 배수 모임이므로 n 은 36 이다.

6. 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 20 cm 인 직사각형 모양의 카드를 늘어 놓아 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이때, 카드는 총 몇 장이 필요한가?

① 10 장 ② 12 장 ③ 13 장 ④ 15 장 ⑤ 17 장

해설

정사각형의 한 변의 길이는 12 와 20 의 최소공배수인 60 cm 이다. 가로는 $60 \div 12 = 5$ (장), 세로는 $60 \div 20 = 3$ (장)이 필요하므로 필요한 카드의 수는 $5 \times 3 = 15$ (장)이다.

7. 옛날부터 우리나라에는 십간(⊠⊠)과 십이지(⊠⊠⊠)를 이용하여 매해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2011년은 신묘년이다. 다음 중 신묘년이 아닌 해는?

정	무	기	경	신	임	계	갑
축	인	묘	진	사	오	미	신
정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미	갑신
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004

을	병	정	무	기	경	신
유	술	해	자	축	인	묘
을유	병술	정해	무자	기축	경인	신묘
2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

① 1831년 ② 1881년 ③ 1951년
④ 2071년 ⑤ 2131년

해설

십간(⊠⊠)의 10가지와 십이지(⊠⊠⊠)의 12가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2011년이 신묘년이면 1831년, 1891년, 1951년, 2071년, 2131년도 신묘년이다.

8. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5\times a = 7\times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 <u>않은</u> 것은?

① 35　　② 70　　③ 105　　④ 140　　⑤ 180

해설

$5\times a = 7\times b = c^2$ 에서

i) $a = 5\times 7^2$, $b = 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(5\times 7^2) = 7\times(5^2\times 7) = (5\times 7)^2 = 35^2$

ii) $a = 2^2\times 5\times 7^2$, $b = 2^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(2^2\times 5\times 7^2) = 7\times(2^2\times 5^2\times 7) = (2\times 5\times 7)^2 = 70^2$

iii) $a = 3^2\times 5\times 7^2$, $b = 3^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(3^2\times 5\times 7^2) = 7\times(3^2\times 5^2\times 7) = (3\times 5\times 7)^2 = 105^2$

iv) $a = 4^2\times 5\times 7^2$, $b = 4^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(4^2\times 5\times 7^2) = 7\times(4^2\times 5^2\times 7) = (4\times 5\times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 $35, 70, 105, 140, \cdots$ 이다.

9. 두 수 $2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$, 60 의 공약수들의 합은?

① 28 ② 35 ③ 48 ④ 51 ⑤ 64

해설

$2^3 \times 3 \times 7^2 \times 11$ 과 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3$
따라서 두 수의 공약수는 $2^2 \times 3$ 의 약수이다.
주어진 두 수의 공약수의 합은 $1+2+3+2^2+2\times3+2^2\times3 = 28$

10. 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 2×3^2 일 때, a, b 의 공약수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6개

해설

a, b 의 공약수는 최대공약수 $2 \times 3^2 = 18$ 의 약수와 같으므로

(a, b의 공약수의 개수)

$=$ (18의 약수의 개수)

$=$ (2×3^2의 약수의 개수)

$= (1+1) \times (2+1)$

$= 6$(개)

11. 서로 맞물려 도는 톱니바퀴 ㉠과 ㉡이 있다. ㉠의 톱니 수는 20, ㉡의 톱니 수는 15일 때, 이 톱니가 같은 이에서 다섯 번째로 다시 맞물리는 것은 ㉡이 몇 바퀴 돈 후인가?

① 16 바퀴　② 18 바퀴　③ 20 바퀴
④ 21 바퀴　⑤ 24 바퀴

해설

20 와 15 의 최소공배수는 60 이다.
같은 지점에 첫번째로 맞물릴 때까지 ㉡ 톱니바퀴는 $60 \div 15 = 4$ (바퀴) 회전하므로
다섯번째로 맞물릴때까지 바퀴 수는 $4 \times 5 = 20$ (바퀴) 이다.

12. 어떤 자연수를 5 로 나누면 3 이 남고, 6 으로 나누면 4 가 남고, 7 로 나누면 5 가 남는다고 한다. 이러한 조건을 만족하는 자연수 중에서 가장 작은 수는?

① 207 ② 208 ③ 209 ④ 210 ⑤ 211

해설

$5, 6, 7$ 로 나누면 항상 2 가 부족하므로 구하는 수를 x 라 하면 $x + 2$ 는 $5, 6, 7$ 의 공배수이다.
$5, 6, 7$ 의 최소공배수는 210 이므로 210 의 배수 중 가장 작은 수는 210 이다.
따라서 $x + 2 = 210$ 이므로 $x = 208$ 이다.

13. 다음 보기 를 모두 만족 시키는 자연수는 모두 몇 개인가?

보기

㉠ 100 이하의 자연수이다.

㉡ 3 의 배수

㉢ 5 의 배수

㉣ 4 로 나누면 나머지가 3 인 수

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

3 과 5 의 최소공배수는 15 이므로 15, 30, 45, 60, 75, 90,
이 중에서 4 로 나누었을 때 나머지가 3 인 수는 15, 75 의 2 개

14. 어떤 자연수 A 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 또 어떤 분수 $\frac{A}{B}$ 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과 역시 모두 자연수가 되었다. 가능한 수 중 가장 작은 A , 가장 큰 B 를 구하여 $A+B$ 를 계산하여라.

① 23　② 25　③ 27　④ 33　⑤ 35

해설

자연수 A 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분모인 6, 9 의 공배수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 작은 자연수는 6 과 9 의 최소공배수인 18 이다.
분수 $\frac{A}{B}$ 에서 B 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분자인 25, 70 의 공약수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 큰 자연수는 25 와 70 의 최대공약수인 5 이다.
$A=18$, $B=5$ 이므로
$A+B=23$ 이다.

15. 어떤 수 N 을 8 로 나누었을 때 몫이 k 이고 나머지가 $k-1$ 인 두 자릿수 N 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 71

해설

$N = 8k + (k-1) = 9k-1$ 이고,
$k-1 < 8$ 이므로 k 의 최댓값은 8 이다.
$\therefore$ 두 자릿수 N 중 가장 큰 수 $= 9 \times 8 - 1 = 71$

16. 일곱 자리 수 $a132784$ 가 7 의 배수이고, 네 자리 수 $b8c1$ 이 11 의 배수일 때, $a+b+c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

7 의 배수 : 뒤에서부터 세 자리씩 끊어서 더하고 뺀 수가 0 이거나 7 의 배수인 수이므로,
$a-132+784=7k \rightarrow 652+a=7k$ 이므로 $a=6$ 이다.
11 의 배수 : 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11 의 배수이므로,
$b+c-9=11n \rightarrow b+c=9$ 이다.
$\therefore a+b+c=15$

17. 자연수 n에 대하여 n부터 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$, n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 을 만족하는 10 보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 7

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
$1,\ 2,\ 3,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 6 = 2\times3,\ 7,\ 8 = 2^3,\ 9 = 3^2,\ 10 = 2\times5,\ 11,\ 12 = 2^2\times3,\ 13$ 이다.
즉, $[1] = 1\times2\times3\times4\times5 = 2^3\times3\times5$ 이고, $s([1]) = s(2^3\times3\times5)$ 약수의 개수를 구하면 $4\times2\times2 = 16$ 이다. 차례대로 값을 구하면
$s([1]) = 16,\ s([2]) = 30,\ s([3]) = 56\ s([4]) = 112,\ s([5]) = 144,\ s([6]) = 96,\ s([7]) = 120,\ s([8]) = 112,\ s([9]) = 128,\ s([10]) = 160$
따라서, $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} < 1$ 인 경우는 $s([n+1]) < s([n])$ 이므로 n 의 값은 5, 7 이다.

18. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때, $[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], \ [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$

$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$

$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$ ($\frac{p}{[p, q]}, q$는 서로소)

$= [1, \ 1]$

$= 1$

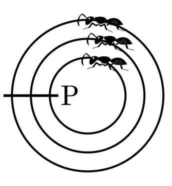
19. 세 수 124, 156, 204를 어떤 수로 나누었더니 그 나머지가 모두 같았다. 어떤 수 중에서 가장 큰 수와 그 때의 나머지를 구하여라.

① 어떤 수 : 7 , 나머지 : 2
② 어떤 수 : 9 , 나머지 : 5
③ 어떤 수 : 12 , 나머지 : 6
④ 어떤 수 : 16 , 나머지 : 2
⑤ 어떤 수 : 16 , 나머지 : 12

해설

어떤 수를 x, 나머지를 r이라 하고 세 수 $124, 156, 204$의 몫을 각각 Q_1, Q_2, Q_3라 하면
$124 = xQ_1 + r$, $156 = xQ_2 + r$, $204 = xQ_3 + r$이므로
각각의 수의 차는 x로 나누어 떨어진다.
$204 - 124 = 80$, $204 - 156 = 48$, $156 - 124 = 32$
32, 48, 80의 최대공약수는 16이므로 어떤 수는 16이고 그 때의 나머지는 12이다.

20. 개미 3 마리가 볼펜으로 그어 놓은 원을 따라 각각의 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있다. 12분 동안 A 개미는 20바퀴를 돌고, B개미는 30바퀴, C개미는 36 바퀴를 돈다. 세 개미가 동시에 P지점에서 출발하여 50분 동안 일정한 속도로 돌았다면 동시에 P지점을 몇 번 통과하는지 구하여라.



▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 번

▷ 정답 : 8번

해설

A, B, C 세 개미가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은 $\frac{12}{20}$분, $\frac{12}{30}$분, $\frac{12}{36}$분이다.

$\frac{12}{20}$분 $=36$초, $\frac{12}{30}$분 $=24$초, $\frac{12}{36}$분 $=20$초이다.

36, 24, 20 의 최소공배수는 360이므로

360초 $=$ 6분 마다 한 번씩 P지점을 통과한다.

따라서 $50 \div 6 = 8 \cdots 2$ 이므로 8번 통과한다.