1. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

2. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\therefore\ 3 \times \frac{1}{a} = -1 \ \Rightarrow\ a = -3$

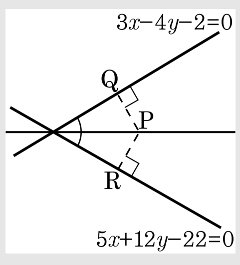
3. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$

4. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

P$(x,\ y)$ 라 하면,
(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$
$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$
즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$
그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

5. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$ ② $x-2y+5=0$ ③ $3x-4y=0$
④ $x+2y+5=0$ ⑤ $x-2y-5=0$

해설

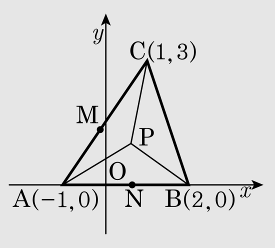
$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면
$X=\dfrac{1+a}{2}$, $Y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$
$\therefore 6X-8Y=0$
$\therefore 3x-4y=0$

6. 좌표평면 위에 세 점 A$(-1, 0)$, B$(2, 0)$, C$(1, 3)$ 이 있다. $\triangle$ABC 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle$ABC 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 M$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, N$\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

7. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(1,\ 0)$　② $\mathrm{P}(0,\ 1)$　③ $\mathrm{P}(-1,\ 0)$
④ $\mathrm{P}(0,\ -1)$　⑤ $\mathrm{P}(0,\ 0)$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$
$-4a + 4 = 8a + 4$
$\therefore\ a = 0$
$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 1)$

8. 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(2, -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(a, b)$라 할 때, $a^2 - b^2$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2$ 으로부터

$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2,\ a + b = 1 \cdots ㉠$

$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 으로부터

$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2,\ a - b = 2 \cdots ㉡$

㉠, ㉡로 부터 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$

9. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7, 4)$, $\mathrm{B}(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는
선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.
$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$
$\therefore\ 5a = 32$

10. 다음 두 직선 $2x+y-2=0, mx-y-3m+5=0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

① $1<m<\frac{5}{2}$ ② $1\le m<\frac{5}{2}$ ③ $1<m\le\frac{5}{2}$
④ $2<m<\frac{5}{2}$ ⑤ $2\le m<\frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2}\right)$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

ⅰ) $\frac{3(m-1)}{m+2}>0$

$\Rightarrow m<-2$ 또는 $m>1$

ⅱ) $\frac{2(2m-5)}{m+2}<0$

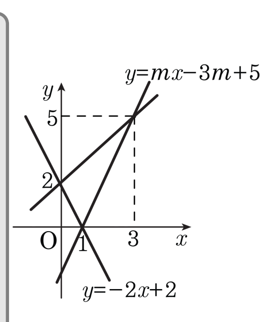
$\Rightarrow -2<m<\frac{5}{2}$

ⅰ), ⅱ) 의 공통영역을 구하면 $1<m<\frac{5}{2}$

해설

$2x+y-2=0$ 의 $x,\ y$ 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1,\ 0)$, $(0,\ 2)$ 이고 $y=m(x-3)+5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3,\ 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0,\ 2)$ 를 대입하면 $m=1$, $(1,\ 0)$ 을 대입하면 $m=\frac{5}{2}$

$\therefore\ 1<m<\frac{5}{2}$



11. $(a,\ b)$가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　　② $(1,\ 0)$　　③ $(0,\ 1)$
④ $(-1,\ -1)$　　⑤ $(-1,\ 0)$

해설

점 $(a,\ b)$가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로
$a+b-1=0$에서 $b=1-a$
이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$
$\rightarrow (x-y)a+y-1=0$
$\therefore\ x-y=0,\ y-1=0$
즉 $x=y,\ y=1$
따라서 구하려는 정점은 $(1,\ 1)$이다.

12. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

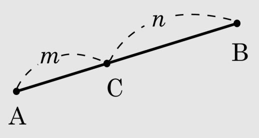
13. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ $(m > n)$ 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. (   )안에 알맞은 값을 구하여라.

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{(\quad)}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

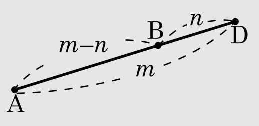


$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}}$

$= (m+n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$

$= \dfrac{m}{m+n}\overline{\mathrm{AB}}$



$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}}$

$= (m-n) : m$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{m}{m-n}\overline{\mathrm{AB}}$

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AC}}} + \dfrac{1}{\overline{\mathrm{AD}}} = \dfrac{m+n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} + \dfrac{m-n}{m}\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AB}}} =$

$\dfrac{2}{\overline{\mathrm{AB}}}$

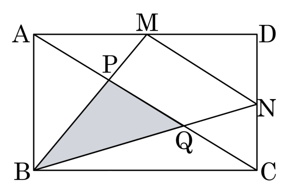
14. 네 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ -3)$, $\mathrm{D}(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\dfrac{3+b}{2},\ \dfrac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1 \cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이어야 하므로
$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

15. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M , N 이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P , Q 라 한다. 사각형 MPQN 의 넓이가 $30\,cm^2$ 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이는?



① $24\,cm^2$　② $25\,cm^2$　③ $28\,cm^2$
④ $30\,cm^2$　⑤ $36\,cm^2$

해설

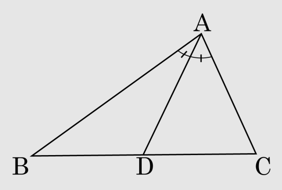
점 P 와 점 Q 가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로
$\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{MN}$ 이다.
$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로
$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.
따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$
$\therefore\ \triangle PBQ = 24(cm^2)$

16. 좌표평면 위에 있는 세 점 A$(2,\ 10)$, B$(-8,\ -14)$, C$(10,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, D의 좌표는?

① D$(5,\ 1)$　　② D$(5,\ -1)$　　③ D$(-5,\ 1)$
④ D$(-5,\ -1)$　　⑤ D$(2,\ -3)$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,



$\overline{AB}\ :\ \overline{AC}=\overline{BD}\ :\ \overline{DC}$ 이다.
$\overline{AB}=26,\ \ \overline{AC}=10$이고
$\overline{AB}\ :\ \overline{AC}=\overline{BD}\ :\ \overline{DC}$이므로
D 는 $\overline{BC}$ 를 $13\ :\ 5$ 로 내분하는 점이다.
$\mathrm{D}\left(\dfrac{13\times10+5\times(-8)}{13+5},\ \dfrac{13\times4+5\times(-14)}{13+5}\right)$
$\therefore$ D$(5,\ -1)$

17. 한 변의 길이가 2 인 정삼각형 ABC 에서 변 BC 위에 한 점 P 가 있다.
$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.
점 P 는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

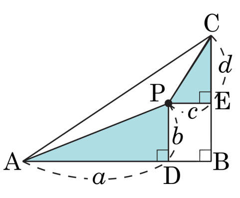
18. 좌표평면 위의 점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가
m(m 은정수) 인 직선의 방정식은
$y-5=m(x-3)\cdots$①
①의 x 절편은 $-5=m(x-3)$
$\therefore\ \ x=3-\dfrac{5}{m}$
①의 y 절편은 $y-5=-3m\ \ \therefore\ \ y=5-3m$
이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.
$\therefore\ \ m=1,\ 5,\ -1,\ -5$
따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은
4개이다

19. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 삼각형의 내부에 한 점 P 를 잡고, 점 P 에서 선분 AB, BC 에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 한다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DP} = b$, $\overline{PE} = c$, $\overline{EC} = d$ 라 할 때, 옳은 내용을 <보기> 에서 모두 고른 것은?



보기

ㄱ $\dfrac{b}{a} < \dfrac{d}{c}$　　ㄴ $\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c}$　　ㄷ $\dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

선분 AP 의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$,

선분 PC 의 기울기는 $\dfrac{d}{c}$,

선분 AC 의 기울기는 $\dfrac{b+d}{a+c}$ 이므로

$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$ 가 성립한다.

따라서 옳은 내용은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y+2+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x-y+2+k(x+y)=0$ 을 정리하면
$(1+k)x+(k-1)y+2=0$
원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k)=\frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2+2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2+2}$ 가 최소일 때,
즉 $k=0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의
최대값은 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$