

1. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▶ 정답: 2

해설

$$\begin{aligned} & y = (a+2)x - a + b \text{ 에서} \\ & \text{기울기} = a+2 = \tan 45^\circ = 1 \\ & \therefore a = -1 \\ & y \text{ 절편 } -a + b = 4 \\ & \therefore b = 3 \\ & \therefore a + b = 2 \end{aligned}$$

2. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\therefore 3 \times \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -3$$

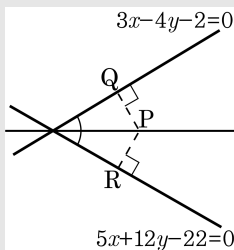
3. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

4. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$$

$$\text{즉, } x - 3y = 0, 3x + y - 2 = 0$$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x$$

5. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x + 4y = 0$

② $x - 2y + 5 = 0$

③ $3x - 4y = 0$

④ $x + 2y + 5 = 0$

⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{7}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

6. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$

② $\sqrt{2}$

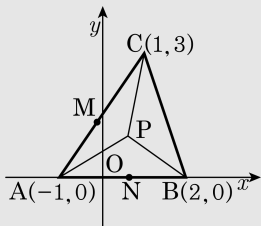
③ 2

④ $\sqrt{10}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

7. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $A(2, 1)$, $B(0, -1)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표는?

① $P(1, 0)$

② $P(0, 1)$

③ $P(-1, 0)$

④ $P(0, -1)$

⑤ $P(0, 0)$

해설

점 $P(a, 2a + 1)$ 라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$$

$$-4a + 4 = 8a + 4$$

$$\therefore a = 0$$

$$\therefore P(0, 1)$$

8. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2, \quad a+b=1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2, \quad a-b=2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$$

9. 좌표평면 위의 두 점 $A(7, 4)$, $B(8, 6)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P 의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$A(7, 4)$ 를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 $C(4, 7)$ 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P 는

선분 BC 와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

10. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0$, $mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ① $1 < m < \frac{5}{2}$ ② $1 \leq m < \frac{5}{2}$ ③ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
 ④ $2 < m < \frac{5}{2}$ ⑤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

$$\text{i) } \frac{3(m-1)}{m+2} > 0$$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

$$\text{ii) } \frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

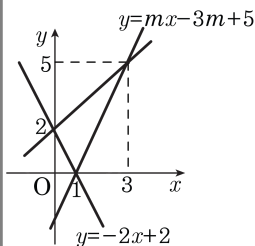
해설

$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를 각각 구하면 (1, 0), (0, 2) 이고

$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 (3, 5) 를 지나는 직선이다. (0, 2) 를 대입하면 $m = 1$, (1, 0)

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$$



11. (a, b) 가 직선 $x + y = 1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax + by = 1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?



① $(1, 1)$

② $(1, 0)$

③ $(0, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(-1, 0)$

해설

점 (a, b) 가 $x + y - 1 = 0$ 위의 점이므로

$a + b - 1 = 0$ 에서 $b = 1 - a$

이때, $ax + by - 1 = ax + (1 - a)y - 1 = 0$

$\rightarrow (x - y)a + y - 1 = 0$

$\therefore x - y = 0, y - 1 = 0$

즉 $x = y, y = 1$

따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

12. 직선 $(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y) + (-3x-y+2) = 0$ 이 식이
 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y=0, -3x-y+2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-1$

따라서 점 $(1, -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

13. 수직선 위의 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 $m : n$ ($m > n$) 으로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D 라고 할 때, 다음 식이 성립한다. ()안에 알맞은 값을 구하여라.

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{(\quad)}{\overline{AB}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC}$$

$$= (m + n) : m$$

$$\text{따라서 } \overline{AC}$$

$$= \frac{m}{m + n} \overline{AB}$$

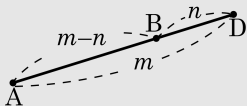
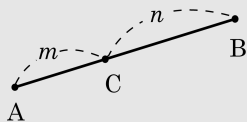
$$\overline{AB} : \overline{AD}$$

$$= (m - n) : m$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} = \frac{m}{m - n} \overline{AB}$$

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{m + n}{m} \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{m - n}{m} \frac{1}{\overline{AB}} =$$

$$\frac{2}{\overline{AB}}$$



14. 네 점 $A(a, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -3)$, $D(b, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되게 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$$\text{즉, } \left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) \text{에서 } \frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$$

$$\therefore a - b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$$

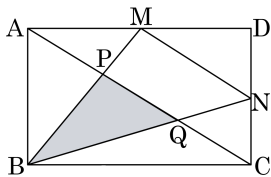
$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 6$

$$\therefore a + b = 13$$

15. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P, Q라 한다. 사각형 MPQN의 넓이가 30 cm^2 일 때, 삼각형 PBQ의 넓이는?



- ① 24 cm^2 ② 25 cm^2 ③ 28 cm^2
 ④ 30 cm^2 ⑤ 36 cm^2

해설

점 P와 점 Q가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로 $\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ 이다.

$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로

$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.

따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$

$\therefore \triangle PBQ = 24(\text{ cm}^2)$

16. 좌표평면 위에 있는 세 점 $A(2, 10), B(-8, -14), C(10, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, D 의 좌표는?

① $D(5, 1)$

② $D(5, -1)$

③ $D(-5, 1)$

④ $D(-5, -1)$

⑤ $D(2, -3)$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AD}$ 가 각의 이등분선일 때,

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이다.}$$

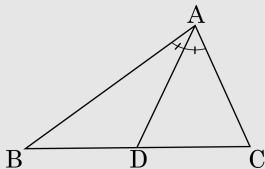
$$\overline{AB} = 26, \overline{AC} = 10 \text{ 이고}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} \text{ 이므로}$$

D 는 $\overline{BC}$ 를 $13 : 5$ 로 내분하는 점이다.

$$D \left(\frac{13 \times 10 + 5 \times (-8)}{13 + 5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-14)}{13 + 5} \right)$$

$$\therefore D(5, -1)$$



17. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고
 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

18. 좌표평면 위의 점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

점 $P(3, 5)$ 를 지나고 기울기가 $m(m$ 은 정수)인 직선의 방정식은

$$y - 5 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$$

①의 x 절편은 $-5 = m(x - 3)$

$$\therefore x = 3 - \frac{5}{m}$$

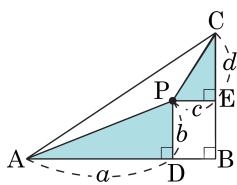
①의 y 절편은 $y - 5 = -3m \therefore y = 5 - 3m$

이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함)이어야 한다.

$$\therefore m = 1, 5, -1, -5$$

따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은 4 개이다

19. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P에서 선분 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 한다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DP} = b$, $\overline{PE} = c$, $\overline{EC} = d$ 라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$

㉡ $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c}$

㉢ $\frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

선분 AP의 기울기는 $\frac{b}{a}$,

선분 PC의 기울기는 $\frac{d}{c}$,

선분 AC의 기울기는 $\frac{b+d}{a+c}$ 이므로

$\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ 가 성립한다.

따라서 옳은 내용은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

20. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 사이의 거리를 $d(k)$ 라 할 때, $d(k)$ 의 최대값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x - y + 2 + k(x + y) = 0$ 을 정리하면

$$(1 + k)x + (k - 1)y + 2 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리 $d(k)$ 는

$$d(k) = \frac{|2|}{\sqrt{(1+k)^2 + (k-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 + 2}}$$

따라서 $d(k)$ 는 분모 $\sqrt{2k^2 + 2}$ 가 최소일 때,

즉 $k = 0$ 일 때 최대가 되므로 $d(k)$ 의

$$\text{최대값은 } \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$