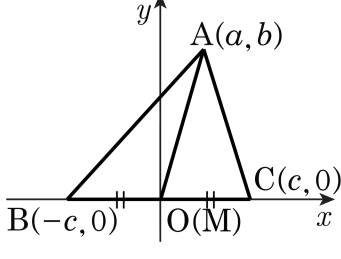


1. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이 성립함을 보이는 과정이다. ㉠ ~ ㉤에 들어갈 말을 나열한 것으로 옳은 것은?

다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 한 변 BC 를 x 축, 변 BC 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면 M 은 원점이 된다.



이때, 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 으로 놓으면

$$\text{㉠} = \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉢} = (a^2 + b^2) + (-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣으로부터} \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

- ① 2, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$
 ② $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$
 ③ 3, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$
 ④ 3, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$
 ⑤ 4, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

해설

파푸스의 정리에서

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (a^2 + b^2) + (-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

2. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 30u

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(m)$

3. 삼각형의 세 변의 중점이 각각 (0, 4), (1, 5), (2, 3) 일 때, 이 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표를 구하면?

- ① (-1, 2), (-1, 6), (3, 4) ② (1, 2), (-1, 5), (3, 4)
③ (1, 2), (-1, 6), (-3, 4) ④ (1, 2), (-1, 6), (3, 4)
⑤ (1, -2), (-1, 6), (3, 4)

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 로 놓으면

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0, \frac{y_1 + y_2}{2} = 4,$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 1, \frac{y_2 + y_3}{2} = 5,$$

$$\frac{x_3 + x_1}{2} = 2, \frac{y_3 + y_1}{2} = 3$$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 3, y_1 + y_2 + y_3 = 12$ 에서

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$$

$$y_1 = 2, y_2 = 6, y_3 = 4$$

즉, 세 꼭짓점의 좌표는 (1, 2), (-1, 6), (3, 4)

4. 두 점 A(3, 0), B(0, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$

② $3x + 2y = 0$

③ $6x - 4y + 9 = 0$

④ $-3x + 2y = 0$

⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 에서

$$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$$

정리하면 $-6x + 4y = 0$

$$\therefore -3x + 2y = 0$$

5. 연립방정식 $ax + 4y + 1 = 0$, $(a - 1)x + 3y + 3 = 0$ 의 해가 불능이 되도록 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행이 되면, 즉 기울기가 같고
y절편이 다르면, 해가 불능이 된다.

$$\therefore -\frac{a}{4} = -\frac{a-1}{3}$$

$$3a = 4a - 4 \therefore a = 4$$

($\because a = -3$ 이면 두 직선이 일치 $\rightarrow$ 해가 부정)

6. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

7. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

8. 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 7 = 0$ 의 교점을 지나고 원점에서
거리가 2 인 직선의 방정식의 기울기는?

- ① $\frac{5}{8}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

먼저 두 직선의 교점을 구하면 $(-2, 3)$

이 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = m(x + 2) + 3$$

원점과의 거리를 구하면,

$$\frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow (2m + 3)^2 = 4(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow m = -\frac{5}{12} \quad \cdots \text{기울기}$$

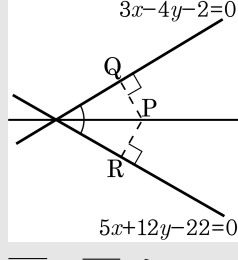
9. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

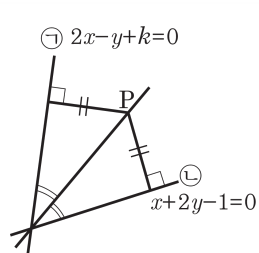
기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

10. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① -2 ② 4 ③ -6
 ④ 8 ⑤ -10



해설

$$2x - y + k = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(점 P와 ㉠사이의 거리) = (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$$

$$\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9 \text{ 또는 } k = -1$$

$$\therefore k \text{의 합} : -10$$

11. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

12. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면,

$\textcircled{1}$ 은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4$, $B = -2$, $C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

13. x, y 에 대한 이차방정식 $2x^2 + py^2 + qxy - 6x + 8y + 2r = 0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p > 1, q = 0, r < 6$

② $p = \frac{7}{9}, q < 0, r < \frac{2}{3}$

③ $p < 9, q = 0, r < \frac{19}{5}$

④ $p = 2, q = 0, r < \frac{25}{4}$

⑤ $p > 1, q < \frac{8}{11}, r < \frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
 x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로

$$p = 2, q = 0$$

따라서, 주어진 방정식은

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 2r = 0$$

이 때, 양변을 2 로 나누면

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y + r = 0$$

이 식을 변형하면

$$\left\{ x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\} + (y^2 + 4y + 4)$$

$$= -r + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 4$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + (y + 2)^2 = -r + \frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r + \frac{25}{4} > 0$$

$$\therefore r < \frac{25}{4}$$

14. 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

㉠ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$

㉡ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 또는 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$

㉢ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3$ 또는 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

㉣ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ 또는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

㉤ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 또는 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

해설

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.

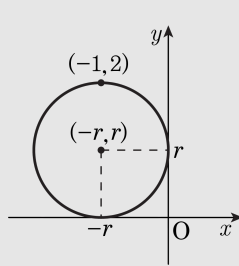
따라서, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$ 이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$



15. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a, a + 2)$ 라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$$

$$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

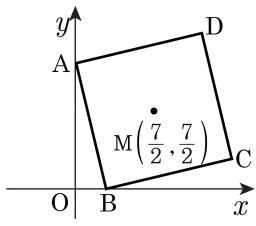
16. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

- ① $O\left(\frac{5}{8}, 0\right)$
- ② $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$
- ③ $O\left(0, \frac{5}{8}\right)$
- ④ $O\left(0, \frac{8}{5}\right)$
- ⑤ $O(0, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}, \overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
 $\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \dots$ ①
 $\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
 $\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \dots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}, y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ 이다.

17. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 $A(0, a), B(b, 0)$ 이라 하고 점 D를 지나면서

x 축에 평행한 직선이 y 축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \cong \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 $D(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

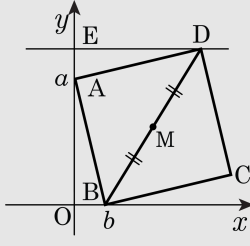
$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = \frac{7}{2} \text{에서 } a+b=7$$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로

$\triangle OAB$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\sqrt{a^2+b^2}=5, a^2+b^2=25$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\} \\ &= \frac{1}{4}(7^2 - 25) = 6 \end{aligned}$$



18. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB , BC , CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ㉠ 2 ㉡ 3 ㉢ 4 ㉣ 5 ㉤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2}\right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3}\right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

19. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x - 4y - 6 = 0$

② $3x + 4y - 6 = 0$

③ $4x - 3y - 6 = 0$

④ $3x - 4y + 6 = 0$

⑤ $3x + 4y + 6 = 0$

해설

직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 임의의 점을 $Q(a, b)$ 라고 하면

$$3a - 4b - 11 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

$\overline{AQ}$ 의 중점을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$x = \frac{3+a}{2}, y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, b = 2y - 2 \quad \cdots \text{②}$$

②를 ①에 대입하면

$$3(2x - 3) - 4(2y - 2) - 11 = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 6 = 0$$

20. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 3a + b = 5$$

21. 좌표평면 위의 세 점 A(1, 4), B(-4, -1), C(1, 0)을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y = k$ 가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4 - \sqrt{5}$

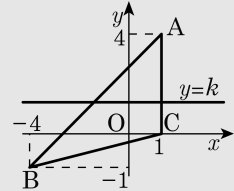
② $4 - \sqrt{6}$

③ $4 - \sqrt{7}$

④ $4 - 2\sqrt{2}$

⑤ $4 - \sqrt{10}$

해설



$$\triangle ABC \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

$$\overline{AB} \text{의 방정식을 구하면, } y = \frac{-1-4}{-4-1}(x-1) + 4$$

$$\Rightarrow y = x + 3$$

$$\therefore y = k \text{와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 } (k-3, k), (1, k)$$

$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$$\frac{1}{2} \times (1 - (k-3)) \times (4-k) = 5$$

$$\text{방정식을 풀면, } k = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore k = 4 - \sqrt{10} \text{ (} \because k < 4 \text{)}$$

22. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0, mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ㉠ $1 < m < \frac{5}{2}$
 ㉡ $1 \leq m < \frac{5}{2}$
 ㉢ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
- ㉣ $2 < m < \frac{5}{2}$
 ㉤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

$$\text{i) } \frac{3(m-1)}{m+2} > 0$$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

$$\text{ii) } \frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

해설

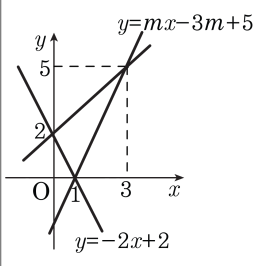
$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를

각각 구하면 (1, 0), (0, 2) 이고

$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 (3, 5) 를 지나는 직선이다. (0, 2) 를 대입하면 $m = 1$, (1, 0)

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$$



23. y 축 위의 한 점 P 로부터 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y-1=0$ 에 이르는 거리가 같을 때, 점 P 의 좌표는?

① $(1, -2)$

② $(-1, 2)$

③ $(0, 2)$

④ $(0, 1)$

⑤ $(0, -2)$

해설

y 축 위의 한 점을 $P(0, y)$ 라 하면 직선

$x-y+3=0$ 과 점 P 사이의 거리는

$$d_1 = \frac{|-y+3|}{\sqrt{2}}$$

직선 $x-y-1=0$

과 점 P 사이의 거리는

$$d_2 = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로

$$\frac{|-y+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-y-1|}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-8y = -8 \therefore y = 1$$

$$\therefore P(0, 1)$$

24. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

25. 두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
- ㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
- ㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는 (0,0) 과 (-4,0) 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
 $\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\frac{2}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$ 에서 $\angle PBA=30^\circ$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

26. 직선 $x = 2$ 에 접하고, 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2 = -8x$

② $y^2 = 8x$

③ $y^2 = -12x$

④ $x^2 = -8y$

⑤ $x^2 = 8y$

해설

구하는 원의 중심을 $P(x, y)$ 라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.

점 P 에서 직선 $x = 2$ 에 내린 수선의 발을 B , 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$

의 중심을 A 라고 하면

$\overline{AP} - 1 = \overline{BP}$ 에서

$$\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$$

$$\therefore y^2 = -12x$$

27. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는
 $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$
(ii) $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$
(iii) $0 \leq x < 1$, $f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$
(iv) $1 \leq x < 3$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$
(v) $3 \leq x < 5$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$
(vi) $5 \leq x$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$

이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.
 $\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$

28. 두 점 $A(t, -3)$, $B(1, 2t)$ 에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은?

① 2

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{7}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(1-t)^2 + (2t+3)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 + 10t + 10} \\ &= \sqrt{5(t+1)^2 + 5} \text{에서}\end{aligned}$$

선분 AB의 길이는 $t = -1$ 일 때 최소이다.

따라서 $t = -1$ 일 때, $\overline{AB} = \sqrt{5}$

29. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a , 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이 되도록 하는 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$$

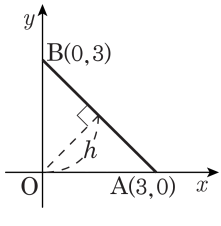
$$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$$

$$2a = 18$$

$$\therefore a = 9$$

30. 다음 그림은 삼각형 OAB 의 넓이를 이용하여 h 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\ \text{따라서} \\ h &= (\quad)\end{aligned}$$



() 안에 알맞은 값은?

- ① $\frac{12}{5}$
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times h \\ \frac{9}{2} &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \times h \\ \text{따라서 } h &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

31. 평면위의 두 점 $A(m^2, -m)$, $B(1, m)$ 일 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는?

① m^2

② $m^2 + 1$

③ $m^2 + 2$

④ $m^2 + 3$

⑤ $m^2 + 4$

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(1 - m^2)^2 + (m + m)^2} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2 + 1} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)^2} = m^2 + 1\end{aligned}$$