1. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 의 중심을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=2x-1$ ③ $y=-x-1$
④ $y=-x+1$ ⑤ $y=x+1$

해설

두 원의 중심은 $(-2,1)$, $(2,-3)$
$\Rightarrow$ 두 점을 지나는 직선은
$y=\dfrac{-3-1}{2-(-2)}(x-2)-3$
$\rightarrow$ $y=-x-1$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 $(2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원

② 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

③ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 2 인 원

④ 중심이 $(2,\ -1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

⑤ 중심이 $(-2,\ 1)$ 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

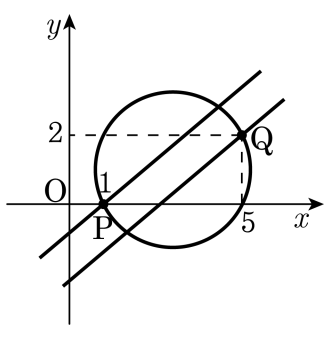
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

$\therefore$ 중심은 $(2,\ -1)$ 이고,

반지름은 4 이다.

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3 등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(5, 2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$의 중점 $C(3,\ 1)$이므로,
$r^2 = \overline{PC}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

4. 세 점 P(1, 0), Q(0, −1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $a+c$의 값은?

① −1　　② −2　　③ −3　　④ 2　　⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1+a+c=0 \cdots ㉠ \\ 1-b+c=0 \cdots ㉡ \\ 2a+2b+c+8=0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

∴ ㉠에서 $a+c=-1$

5. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \cdots\cdots$ ㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \ \cdots\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2} \quad (\because\ r > 0)$

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$　　② $c^2 = b$　　③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$　　⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

7. 다음은 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

> $x^2+y^2=1 \cdots$ ㉠
> $y=2x+k \cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
> $5x^2+4kx+k^2-1=0 \cdots$ ㉢
> ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
> $D=(4k)^2-4\cdot5\cdot(k^2-1)$
> (가)0
> k^2(나)5 $\quad\therefore$ (다)

① (가):$>$, (나):$<$, (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

② (가):$=$, (나):$=$, (다):$k=\pm\sqrt{5}$

③ (가):$>$, (나):$<$, (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④ (가):$>$, (나):$>$, (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

⑤ (가):$<$, (나):$>$, (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2>5$
(다): $k^2-5>0 \quad\Rightarrow\quad k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

8. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$
② $x^2+y^2+2x-2y=2$
③ $x^2+y^2-2x+2y=2$
④ $x^2+y^2-2x-2y=2$
⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

9. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$　　② $k > -5$　　③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$　　⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$
이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

10. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

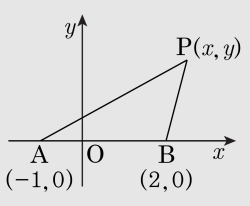
원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

11. 두 점 $A(-1,\ 0), B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면



$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

12. 점$(2,\ 1)$ 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 $(2,\ 1)$ 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로

$$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

13. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

14. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

15. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

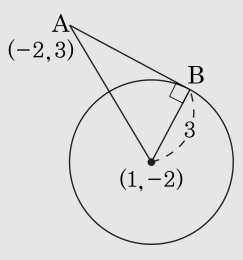
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



16. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

17. 임의의 실수 a에 대하여 원 $x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

해설

$x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4+a(x+y-2)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4=0 \cdots\cdots$ ①
이고 $x+y-2=0 \cdots\cdots$ ②
② 에서 $y=-x+2$ 를 ① 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2+2(-x+2)-4=0$ 이를 정리하면
$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$
$\therefore x=2,\ y=0\ ,\ x=1,\ y=1$
$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(1,\ 1)$
$\therefore$ A, B 의 중점의 좌표 $=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

18. 두 점 A$(-3,\ 8)$, B$(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

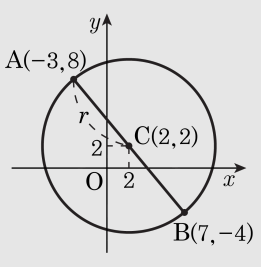
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$　　② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$　　④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

19. 세 점 $P(-2, -4)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 3)$ 을 지나는 원의중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$P(-2, -4)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 3)$

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases} (-2-a)^2+(-4-b)^2=r^2 & \cdots ㉠ \\ (1-a)^2+(5-b)^2=r^2 & \cdots ㉡ \\ (5-a)^2+(3-b)^2=r^2 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡식 연립 :

$a+3b=1 \cdots ㉣$

㉡, ㉢식 연립 :

$2a-b=2 \cdots ㉤$

㉢, ㉠식 연립 :

$a+b=1 \cdots ㉥$

㉣, ㉥연립하면 $b=0,\ a=1$

㉠식에 $(-2-1)^2+(-4-0)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=25$

$\therefore\ r=5$

$a+b+r=1+0+5=6$

20. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 A$(-1,\ 0)$ B$(3,\ 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0,\ 3),\ r = 10$
② $(0,\ 3),\ r = \sqrt{10}$
③ $(0,\ 2),\ r = 10$
④ $(0,\ 2),\ r = \sqrt{10}$
⑤ $(0,\ -3),\ r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \cdots$ ① 이다.
$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
$a^2 = r^2 - 1 \quad \cdots$ ②
$(a-2)^2 = r^2 - 9 \quad \cdots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
$a^2 = (a-2)^2 + 8$
$\Rightarrow \quad a = 3 \quad r = \sqrt{10}$
$\therefore$ 중심은 $(0,\ 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

21. x, y에 대한 이차방정식 $2x^2+py^2+qxy-6x+8y+2r=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p>1,\ q=0,\ r<6$
② $p=\frac{7}{9},\ q<0,\ r<\frac{2}{3}$
③ $p<9,\ q=0,\ r<\frac{19}{5}$
④ $p=2,\ q=0,\ r<\frac{25}{4}$
⑤ $p>1,\ q<\frac{8}{11},\ r<\frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로
$p=2,\ q=0$
따라서, 주어진 방정식은
$2x^2+2y^2-6x+8y+2r=0$
이 때, 양변을 2 로 나누면
$x^2+y^2-3x+4y+r=0$
이 식을 변형하면

$$\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\left(y^2+4y+4\right)$$

$$=-r+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=-r+\frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r+\frac{25}{4}>0$$

$$\therefore r<\frac{25}{4}$$

22. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2, 4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

23. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$(x-a)^2+(y+a)^2 = 2a^2+4a+5$$
$$= 2(a+1)^2+3$$

따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

24. x 축에 접하고 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$　② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$　④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 $(a,\ b)$ 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,\ 1)$, $(-4,\ 8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0 \quad \therefore \quad a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

25. 중심이 직선 $3x+y=12$의 제1사분면 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　② $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

③ $(x-3)^2+(y-3)^2=9$　　④ $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

해설

x축 및 y축에 동시에 접하므로 구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$으로 나타낼 수 있다.
중심이 $a, -3a+12$를 지나므로 $a=-3a+12$이다.
따라서 $a=3$,
구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$이다.

26. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면
$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$
즉 $4\overline{PB}^2=9\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\}=9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2=36\pi$

27. $A(-2, 1)$과 점 $B(2, -1)$을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 이므로 교점 P는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P의 자취의 길이는 $\overline{AB} \times \pi$이다.
$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$이다.

28. 점 $A(0,6)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

원 위의 점을 $P(a,\ b)$,
선분 AP의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면
$x=\dfrac{a}{2}$, $y=\dfrac{6+b}{2}$
$\therefore\ a=2x,\ b=2(y-3)\ \cdots\cdots$ ㉠
이 때, 점 $P(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=4\ \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $4x^2+4(y-3)^2=4$
$\therefore\ x^2+(y-3)^2=1$
따라서, 선분 AP의 중점 M은 중심이 $(0,\ 3)$
이고, 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 길이는 $2\pi\cdot 1=2\pi$

29. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

30. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$　　② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$　　④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

31. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$\frac{|a|}{5} < 2$, $|a| < 10$, $-10 < a < 10$

$a = -9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ $\therefore$ 19 개

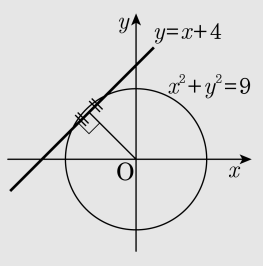
32. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

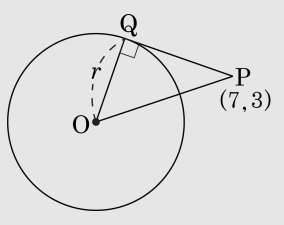


원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

33. P(7, 3) 에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=15$ 에 그은 한 접선의 접점을 Q 라고 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하면?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 20

해설



$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2$

$= (6^2+2^2) - 15 = 25$

$\therefore\ \overline{PQ} = 5$

34. 직선 $(a-1)x-(a-2)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

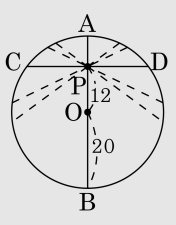
직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
따라서 원의 중심 $(1,2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1)\times 1-(a-2)\times 2-1=0$
$\therefore\ a=2$

35. 반지름이 20 인 원의 내부에 중심으로부터 12 만큼 떨어져 있는 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설



점 P 를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB 이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현CD 이다.

$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32$, $\overline{AB} = 40$

점 P 를 중심으로 현을 회전시키면 32 와 40 사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32, 40 인 것이 한 개,

33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 인 것이 각각 두 개씩 있다.

∴ 16 개