1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$ ② $a+b=x+y$ ③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
④ $x=y$ ⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을
간단히 정리하면
$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$
즉, $(ay-bx)^2=0$
$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$ 는 실수)
따라서, $ay=bx$ 에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

2. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

3. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$를 $x + 2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

4. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$
$=(x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$
$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

5. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

6. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$
$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로
$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$
이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로
$h(-2)=4-2m+8=0$
$\therefore\ m=6$

7. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$이다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A = Ga, B = Gb$(a, b는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore\ G = x + 2$

8. 자연수 a, b의 최대공약수를 (a, b)로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a를 b로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $a = bq + r$ $(0 \leq r < b)$이고, 이 때, $(a,\ b) = (b,\ r)$가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996 과 240 의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240,$ (가)$) = ($(가)$, 12) = (12,$ (나)$) =$ (나)

① (가)$= 74$, (나)$= 2$　② (가)$= 72$, (나)$= 6$

③ (가)$= 78$, (나)$= 2$　④ (가)$= 76$, (나)$= 6$

⑤ (가)$= 76$, (나)$= 4$

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76,\ 240 = 76 \cdot 3 + 12$

$76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로

$(1996,\ 240) = (240,\ 76) = (76,\ 12) = (12,\ 4) = 4$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2-(ka-2k+b)=0$

$\Rightarrow \quad (2-a)k+4-b=0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a=2,\ b=4$

$\therefore\ a+b=6$

10. 조건 $x^2-2kx+k^2+2k+3=0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha+2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+2=2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha+2)=k^2+2k+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha=k-1$을 ㉡에 대입하면,
$(k-1)(k+1)=k^2+2k+3$
$\therefore\ k=-2$

11. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면 $\alpha+\beta=2$
$f(2x-3)=0$에서
$2x-3=\alpha,\ 2x-3=\beta$
$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$
$\therefore$ (두 근의 합) $=\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

12. x, y가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$
따라서 $x=-2,\ y=3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

13. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

14. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

① 4 ② 14 ③ 24 ④ 34 ⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면
$f(2) = A + B + C + D$ 이므로
$f(2)$ 를 구하기 위해서는
$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,
$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\
 & & 3 & 3 & 2 \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} \\
 & & 3 & 6 & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \\
 & & 3 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & &
\end{array}$$

$\therefore\ A = 3,\ B = 9,\ C = 8,\ D = 4$
$\therefore\ A + B + C + D = 24$

15. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$

② $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이면 $\alpha = r,\ \beta = \delta$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$

④ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$

⑤ $\alpha^2 < 0$

해설

① $\alpha = 1,\ \beta = i$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ 이다.

② $\alpha = 1,\ \beta = 1$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i$ 이고, $r = 2,\ \delta = -1 + i$ 이면 $r + \delta i = 1 + i$ 에서 $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이지만 $\alpha \neq r,\ \beta \neq \delta$ 이다.

③ $\alpha = 1,\ \beta = i$ 이면 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ 이다.

④ $\alpha \neq 0$ 이고 $\beta \neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta = 0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta = 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2 < 0$ 이나 $\alpha = 1+i$ 이면 $\alpha^2 = (1+i)^2 = 2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

16. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$
$n=4k+1 \Rightarrow f(n)=-i^{4k+1}=-i$
$n=4k+2 \Rightarrow f(n)=2\pi$
$n=4k+3 \Rightarrow f(n)=-i$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$
계속 반복되므로
$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$
$=i\times 501+f(2005)$
$=501i-i=500i$

17. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

18. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$　② -1　③ $\frac{1}{8}$　④ 1　⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

19. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.