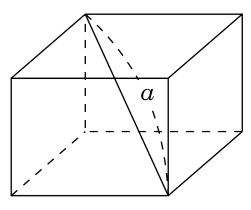
1. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$　② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$　③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$
④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$　⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 $x,\ y,\ z$라 하면

$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$

$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)$$
$$= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2$$
$$= \frac{1}{16}b^2 - a^2$$

2. x에 대한 세 다항식 $f(x), g(x), h(x)$가 항등식 $(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$를 만족한다. 이 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 최소공배수를 구하면?

① $f(x)$　　② $xf(x)$

③ $x(x+1)f(x)$　　④ $(x-1)f(x)$

⑤ $(x+1)(x-1)f(x)$

해설

$(x-1)f(x) = xg(x) = (x+1)h(x)$에서

① 다항식 $f(x)$에 대하여 $x = 0, -1$을 대입하면 $f(0) = f(-1) = 0$

② 다항식 $g(x)$에 대하여 $x = 1, -1$을 대입하면 $g(1) = g(-1) = 0$

③ 다항식 $h(x)$에 대하여 $x = 0, 1$을 대입하면 $h(0) = h(1) = 0$

①, ②, ③으로부터

$f(x), g(x), h(x)$의 최대공약수를 G라 하면

$f(x) = x(x+1)G$, $g(x) = (x-1)(x+1)G$, $h(x) = x(x-1)G$

$\therefore$ $f(x), g(x), h(x)$의 최소공배수는

$x(x+1)(x-1)G = (x-1)f(x)$

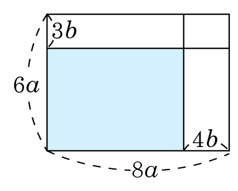
3. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x)=(x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x)=(x-1)g(x)\cdots$①
$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로
$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.
따라서 $g(x)=(x+1)h(x)\cdots$② 로 놓으면
①에서 $f(x)=(x-1)h(x)\cdots$③
②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

4. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$　② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$　④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

5. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\ &= 4AB \\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n \\ &= 4 \times 2^n \\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

6. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$ 에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

$=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\frac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$

7. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α,β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ,δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p,q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$
④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로
주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$
$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$
$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$
그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$
또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서
$\delta^2+n\delta+p=p-q$
따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

8. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$의 값을 구하면?

① 50 ② 40 ③ 10 ④ 30 ⑤ 20

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$

$=(1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\cdots+\{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$=(1+4+9+16+25)-(1+2+3+4+5)(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$

$=55-15\times 2-5=55-30-5=20$

9. x에 대한 방정식 $x^2 - 2px + p + 2 = 0$의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-2 < p < 0$　② $-2 \le p < 0$　③ $-2 < p \le 0$
④ $-2 \le p \le 0$　⑤ $0 \le p < 2$

해설

$x^2 - 2px + p + 2 = 0$의 근은
$x = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2} \cdots\cdots ㉠$
(i) ㉠이 실근일 때
$p^2 - p - 2 \ge 0,\ 2p < 0,\ p + 2 > 0$
$\therefore\ -2 < p \le -1$
(ii) ㉠이 허근일 때
$p^2 - p - 2 < 0$이고 $p < 0$
$\therefore\ -1 < p < 0$
이상에서 구하는 p의 조건은 $-2 < p < 0$

10. 어느 회사의 A공장과 B공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A공장에서는 모니터를 400대, B공장에서는 스피커를 10000대 만든다. 모니터는 20000대, 스피커는 80000대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 $50,000$원, 주말에는 $70,000$원을 지불한다. 2008년 4월 1일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : ______ 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4월 1일, 4월 2일 $\cdots$ 을 각각 $1,\ 2\cdots$ 라 하면
12월 31일은 275이다.
모니터가 운반되는 날이 $5a+1$이고
스피커가 운반되는 날이 $8b+2$이면,
같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a+1=8b+2$
$b=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$를 대입하면
$b=5k+3$ 일 때, 성립한다.
그러므로 같은날 운반되는 경우
$\rightarrow 40k+26\ (k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 이다.
금년에 같은 날 운반
$26,\ 66,\ 106,\ 146,\ 186,\ 226,\ 266$ 이고,
이들 중 평일은 5일, 주말은 2일 이므로
$(50000\times 5)+(70000\times 2)\ =\ 250000+140000\ =\ 390000$