1. $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 구하여라.

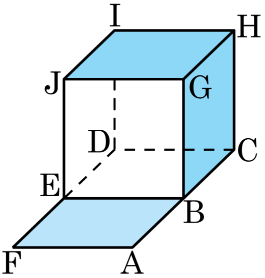
▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 12개

해설

$a,\ b$ 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
$p,\ q,\ r$ 중 한 개를 택하는 방법 : 3 가지
$x,\ y$ 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지
전개했을 때 모든 항의 개수는
$2 \times 3 \times 2 = 12$ (개)

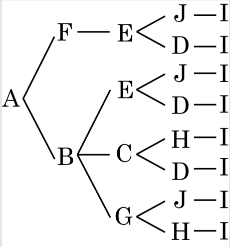
2. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A에서 I 까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

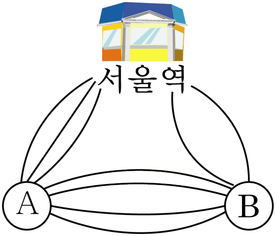
해설

A 에서 I 까지 최단 거리로 수형도를 그려보면



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

3. 지점 A 에서 서울역으로 가는 길은 3 가지, 서울역에서 지점 B 로 가는 길은 2 가지가 있다. 또, A 에서 서울역을 거치지 않고 B 로 가는 길은 4 가지이다. 서울역을 한 번만 거쳐서 A와 B를 왕복하는 방법의 수를 구하시오.(단, A 에서 출발한다.)



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 48 가지

해설

(i) $A \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow B \rightarrow A$

: $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)

(ii) $A \rightarrow B \rightarrow$ 서울역 $\rightarrow A$

: $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)

(i), (ii) 이므로

$24 + 24 = 48$ (가지)

4. 다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 5 의 배수의 개수는?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$ 에서 서로 다른 세 숫자를 택하여 만든 세 자리의 자연수가 5 의 배수이려면 일의 자리의 수가 5 이어야 한다.
따라서, $1, 2, 3, 4$ 에서 서로 다른 두 숫자를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 배열하면 되므로 구하는 5 의 배수의 개수는
${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (개)

5. ${}_{n}C_{4} = {}_{n}C_{6}$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$n = 4 + 6 = 10$

6. 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 7 개의 점이 있을 때, 점을 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ___개

▷ 정답 : 21개

해설

$_7C_2 = 21$

7. 10 명의 학생이 있다. 5 명, 5 명의 두 무리로 나누는 방법은 몇 가지인지 구하여라.

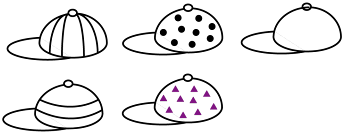
▶ **답 :** ________ 가지

▷ **정답 :** 126 가지

해설

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 126 \text{ (가지)} \Leftarrow 5 \text{ 명씩 } 2 \text{ 패}$$

8. 5명이 자기 모자를 벗어 섞은 후 다시 무심코 1개를 집을 때 한 사람만이 자신의 모자를 가지게 되는 경우의 수는?



① 33　② 36　③ 40　④ 45　⑤ 54

해설

n명이 전부 다른 사람의 모자를 집어 드는 경우의 수를 F_n 이라고 하면

$F_{n=}(n-1)(F_{n-1+}F_{n-2})(n \geq 3)$,

$F_0 = 0, F_1 = 1$ 이므로

$F_3 = 2, F_4 = 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$5F_4 = 5 \times 9 = 45$

9. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{(\text{나}})$ 임을 보인 것이다.

10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다. 이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다. 따라서 다음 등식이 성립한다. ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$
② $5{}_9P_4,\ {}_9P_5$
③ ${}_9P_4,\ {}_8P_5$
④ ${}_8P_4,\ 4{}_9P_5$
⑤ $4{}_9P_4,\ {}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 + {}_9P_5$

10. n 권의 책이있다.(단, $n \geq 5$) 이 n 권 중에서 2 권의 책을 뽑아 책꽂이에 일렬로 꽂을 때, 그 총 방법의 수가 42 가지였다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 7$

해설

n 권에서 2 권을 뽑는 순열의 수는 ${}_nP_2$ 가지이므로

${}_nP_2 = 42$ 곧, $n(n-1) = 42 \quad \therefore \ (n+6)(n-7) = 0$

한편, $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

11. *cellular* 의 8 개의 문자를 모음끼리 이웃하여 나열하는 방법의 수는?

① 705　② 720　③ 735　④ 750　⑤ 765

해설

l 이 3 번 반복되고, 모음을 하나로 보면, $\Rightarrow \dfrac{6!}{3!}$

여기에 모음을 배열하는 방법을 곱한다.

$\therefore \dfrac{6!}{3!} \times 3! = 720$

12. 6 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 배열할 때, 모음 a, e가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

a, e 를 제외한 나머지 b, c, d, f 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 a, e를 늘어놓으면, a, e는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\, b\, \square\, c\, \square\, d\, \square\, f\, \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 a, e 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

13. A, B, C, D, E 다섯 명의 학생이 있다. 항상 D가 C보다 앞에 오도록 일렬로 서는 방법의 수는?

① 12　② 20　③ 24　④ 30　⑤ 60

해설

전체를 줄세운 다음 C, D가 순서를 바꾸어 서는 경우로 나누어 주면 된다.

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

14. 0, 1, 2, 3, 4 의 숫자가 하나씩 적힌 5 장의 카드에서 3 장을 택하여 만들 수 있는 세 자리의 정수 중 3 의 배수의 개수는?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

3 의 배수가 되려면 자리수의 합이 3 의 배수가 되어야 한다.

1) 합이 3 : (2, 1, 0) 세자리 수의 개수 : 4 개

2) 합이 6 : (4, 2, 0) (3, 2, 1)

세자리 수의 개수 : $4 + 6 = 10$ 개

3) 합이 9 : (4, 3, 2)

세자리 수의 개수 : 6 개

$\therefore\ 4 + 10 + 6 = 20$

15. 남학생 4명, 여학생 6명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여자인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 78 가지

해설

전체의 경우에서 모두 남자인 경우의 수를 빼준다.

${}_{10}P_2 - {}_4P_2 = 90 - 12 = 78$

16. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 이용하여 만든 네 자리의 정수 중에서 2300보다 큰 수의 개수는?

① 12개 ② 16개 ③ 20개 ④ 24개 ⑤ 30개

해설

23$\square\square$의 개수 : 2개

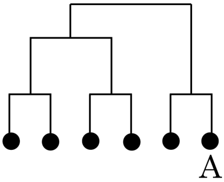
24$\square\square$의 개수 : 2개

3$\square\square\square$의 개수 : 6개

4$\square\square\square$의 개수 : 6개

$\therefore 2+2+6+6=16$(개)

17. 지난 대회 우승 팀 A 가 먼저 배정을 받은 다음 그림과 같은 토너먼트 방식의 대진표에서 제비뽑기를 하여 5 개의 팀을 결정하기로 할 때, 가능한 모든 경우의 수는?



① 15　② 18　③ 20　④ 24　⑤ 30

해설

A 팀과 게임을 할 팀을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_1 = 5$ (가지)

그 각각의 경우에 대하여 나머지 4 팀을

(2 팀, 2 팀) 으로 편성하는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 3 = 15$ (가지)

18. 100 원짜리 동전 3 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 3 개를 가지고 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 98 ② 102 ③ 110 ④ 115 ⑤ 120

해설

동전을 사용하지 않는 것도 지불 방법이 되므로 각 동전을 사용하는 경우의 수는 $(3+1)$ 가지이다.

그러나, 금액이 모두 0 원이면 지불방법이 되지 못하므로,

$\therefore$(지불 방법의 수) $=(3+1)(3+1)(3+1)-1=63$ 지불 금액의 수는 금액이 중복되어 있으므로

100 원짜리 동전 3 개를 50 원짜리 동전 6 개로 바꿔 생각한다.

즉, 50 원짜리 동전 9 개와 10 원짜리 동전 3 개로 지불할 수 있는 경우의 수를 계산하면 된다.

$\therefore$(지불 금액의 수)$=(9+1)(3+1)-1=39$

$\therefore a+b=102$

19. 자신의 영문 이름을 이용하여 이메일 아이디를 만들려고 한다 첫 번째 자리에는 자신의 영문 이름 중 모음을, 두 번째 자리에는 자음을, 세 번째 자리에는 다시 모음을 사용하여 만들 때, 영문 이름이 Lee Soon-shin인 사람이 만들 수 있는 아이디의 개수는? 단, 대소문자의 구분은 없고, 같은 알파벳은 2번 이상 사용하지 않는다.

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

두 번째 자리에 올 수 있는 자음의 가지수는 4가지이고,
모음 3가지를 첫 번째 세 번째에 배열하는 방법은 ${}_3P_2$이다.
$\therefore 4 \times {}_3P_2 = 24$

20. 여섯 개의 수 0, 1, 2, 3, 4, 5 가 있다. 이 중에서 서로 다른 네 개의 수를 뽑아서 네 자리 정수를 만들려고 한다. 이때, 십의 자리의 수가 일의 자리의 수보다 작게 되는 네 자리의 정수는 모두 몇 개인가?

① 90개 ② 108개 ③ 120개 ④ 145개 ⑤ 150개

해설

네 자리수를 $A\ B\ C\ D$라 하면
A 자리에 올수 있는 수는 0 을 제외한 수이므로 5 개,
C 자리에 올 수 있는수는 A 에서 사용한 수를 제외하고
0 을 포함한 수이므로 5 개,
B 와 D 는 남아있는 4 개의 수중 큰 수와 작은 수를 구분해야
하므로 ${}_4C_2$,
따라서 구하는 개수는 $5 \times 5 \times_4 C_2 = 150$ (개)

21. 가로로 6개의 평행선과 세로로 4개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이때, 만들 수 있는 평행사변형은 모두 몇 개인가?

① 60 개 ② 90 개 ③ 120 개

④ 150 개 ⑤ 180 개

해설

가로와 세로에서 각각 2개씩을 선택하면 하나의 평행사변형이 만들어진다.

가로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$$ {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15, $$

세로 줄에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$$ {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 $$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는 $15 \times 6 = 90$(개)

22. 7 층짜리 건물의 1 층에서 7 명이 승강기를 함께 탄 후 7 층까지 올라가는 동안 3 개의 층에서 각각 2 명, 2 명, 3 명이 내리는 방법의 수는?

① 3150　② 6300　③ 9450

④ 12600　⑤ 15750

해설

먼저 내릴 3 개의 층을 선택하는 방법 :

${}_6C_3 = 20$

7 명을 2 명, 2 명, 3 명으로 나누어 3 개의 층에

배열하는 방법 : $\Rightarrow {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 630$

$\therefore 20 \times 630 = 12600$

23. 수험생 6 명의 수험표를 섞어서 임의로 1장씩 나누어 줄 때 6명 중 어느 2명이 자기 수험표를 받을 경우의 수를 구하면?

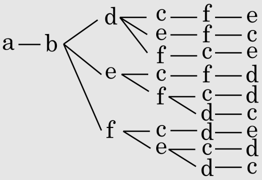
① 60가지　② 85가지　③ 120가지

④ 135가지　⑤ 145가지

해설

A, B, C, D, E, F 의 6 명과 수험표를 a, b, c, d, e, f 라 하고 수형도를 그린다.

A　B　C　D　E　F



$\therefore$ (A, B) 두 명만이 자기 수험표를 받는 경우의 수가 9 가지이고, 또 2 명이 자기 수험표를 받는 경우의 수는 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 가지이다.

$\therefore$ 모든 경우의 수는 $9 \times 15 = 135$(가지)

24. 똑같은 의자 20 개가 일렬로 배열되어 있다. 여기에 구별되지 않는 똑같은 공 8 개를 올려놓으려고 할 때, 이웃하는 공 사이에 홀수 개의 빈 의자가 있도록 하는 방법의 수는?(단, 한 의자에는 한 개의 공만 올려놓는다.)

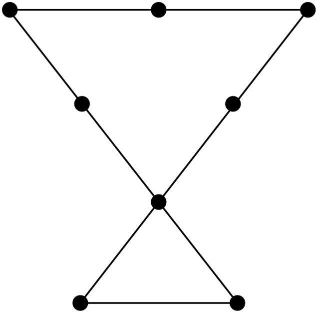
① 45 ② 90 ③ 725

④ 62985 ⑤ 125970

해설

20 개의 의자에 1 번부터 20 번까지 번호를 부여했다고 하자.
만약 공 하나가 홀수번호인 의자에 놓였다면 홀수개의 빈 의자를 지나 다음 공이 놓이게 되므로 이 의자의 번호도 홀수이다.
마찬가지로 하나의 공이 짝수번호인 의자에 놓였다면 다음 공이 놓인 의자의 번호도 짝수이다.
즉 8 개의 공은 모두 홀수 번호의 의자에 놓이거나 모두 짝수 번호의 의자에 놓이게 된다.
따라서, 구하는 경우의 수는 10 개의 홀수 번 의자중 8 개를 택하거나, 10 개의 짝수번 의자 중 8 개를 택하는 경우의 수이다.
$\therefore {}_{10}C_8 + {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 + {}_{10}C_2 = 90$

25. 그림과 같이 삼각형의 두 변을 연장하여 또 다른 삼각형을 만들었다. 이 도형 위에 있는 8개의 점 중에서 3개의 점을 이어 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 36 ② 47 ③ 54 ④ 66 ⑤ 75

해설

8개의 점 중에서 3개의 점을 선택하는 경우에서
직선위의 점 중 3 개를 선택하는 경우를 빼준다.
$\Rightarrow {}_8C_3 - ({}_4C_3 + {}_4C_3 + {}_3C_3) = 47$