1. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

2. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1)$ $\therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore$ $a = -2, b = 3$

$\therefore ab = -6$

3. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$①
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

4. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$

$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore \ abc=9$

5. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore \; x + 1 = 0, \quad x = -1$

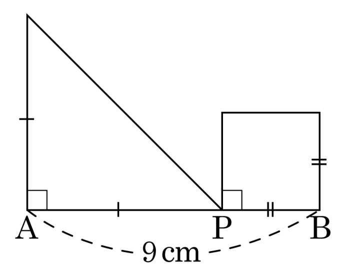
6. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100 ② 121 ③ 144 ④ 169 ⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28-x$ 이다.
두 자연수의 곱은 $x(28-x)$ 이다.
$x(28-x)=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$

7. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

8. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100)}=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

9. x^{30}을 $x-3$으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 3^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　⑤ $\frac{1}{2}(3^{29}-1)$

해설

$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$

$x=3$을 대입하면 $3^{30}=R$

$Q(x)$의 계수의 총합은 $Q(1)$과 같으므로

$x=1$을 대입하면 $1=-2Q(1)+3^{30}$

$\therefore\ Q(1)=\dfrac{3^{30}-1}{2}$

$\therefore\ R-Q(1)=3^{30}-\dfrac{3^{30}-1}{2}=\dfrac{3^{30}+1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^{30}+1)$

10. 세 양수 $a,\ b,\ c$가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 $a,\ b,\ c$를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

11. $a+b+c=0$일 때, 다음 중 $2a^2+bc$와 같은 것은?

① $(a-c)^2$　② $(b+c)^2$　③ $(a+b)(b+c)$

④ $(a-b)(a-c)$　⑤ $(a-b)(a+c)$

해설

$2a^2+bc=2a^2-b(a+b)$ $(\because\ c=-a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

$=(a-b)(2a+b)$

$=(a-b)(a+b+a)$

$=(a-b)(a-c)$ $(\because a+b=-c)$

12. 두 다항식 x^3+px^2+qx+1과 x^3+qx^2+px+1의 최대공약수가 x에 대한 일차식일 때, 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A=x^3+px^2+qx+1$, $B=x^3+qx^2+px+1$이라고 하면

$$\begin{aligned} A-B &= (x^3+px^2+qx+1)-(x^3+qx^2+px+1) \\ &= (p-q)x^2-(p-q)x \\ &= (p-q)x(x-1) \end{aligned}$$

이 때, $A-B$는 두 다항식 A, B의 최대공약수를 인수로 갖는다.
그런데, $p=q$이면 $A=B$가 되어 최대공약수가 x에 대한 삼차식이 되므로 최대공약수가 x에 대한 일차식이라는 조건에 모순이다.
또한, 두 다항식 A, B의 상수항이 모두 1이므로 x를 인수로 가질 수 없다.
따라서, $x-1$이 두 다항식 A, B의 최대공약수이고, 최대공약수는 A, B의 인수이므로 $x=1$을 두 다항식에 각각 대입하면 그 값이 0이어야 한다.
$1+p+q+1=0$, $1+q+p+1=0$
$\therefore\ p+q=-2$

13. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i)*z=1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ i

해설

$z=a+bi$라 하면

$(1+2i)*z$

$=(1+2i)+(a+bi)+(1+2i)(a+bi)i$

$=(-a-b+1)+(a-b+2)i=1$

$-a-b+1=1,\ a-b+2=0$

$a=-1,\ b=1$

$\therefore\ z=-1+i$

14. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1	㉡ -1	㉢ i	㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2\ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k+2} = \sqrt{1}\cdot i^2 = -1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k}$

$= 1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

15. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

16. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$
$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로
$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서
$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$
$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$
$q\neq 0$이므로
$p=1,\ q^2=2$
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$
$\therefore\ x^2-2x+3=0$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

17. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답： ______ cm

▶ 답： ______ cm

▷ 정답： 12 cm

▷ 정답： 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

$y = x(24-x)$
$= -x^2 + 24x$
$= -(x-12)^2 + 144$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144 를 갖는다.

$\therefore x = 12,\ 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

18. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

19. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$　② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$　③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $2(3^{30}+1)$　⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$ ㉠
이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.
㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29차의 다항식이므로
$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은
$x=1$ 을 대입한
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$ 과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$ ㉡
한편 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
$1=-2Q(1)+R$ $\therefore$ $Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}|Q(1)-R| &= \left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right| = \frac{|R+1|}{2} \\ &= \frac{|3^{30}+1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30}+1)\end{aligned}$$

20. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡　　④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

21. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x-1$로 나누면 나누어떨어지고, $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, $m-n$의 값은?

① -2　　② -3　　③ -4　　④ 2　　⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+mx^2+nx+1 &= (x-1)\,Q(x) \\ &= (x+2)\,Q'(x)+3 \end{aligned}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+m+n+1=0$

$\therefore m+n=-2 \cdots$ ㉠

양변에 $x=-2$을 대입하면

$-8+4m-2n+1=3$

$\therefore 2m-n=5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=1, n=-3$

$\therefore m-n=4$

22. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

x^3 의 계수가 1 이므로

$f(x)=(x^2+2)(x+\alpha)+x+5\cdots$①

$x-1$ 의 인수를 가지므로, $f(1)=0$

① 에 넣어 계산하면,

$f(1)=3(1+\alpha)+6=0,\ \alpha=-3$

$\therefore\ f(2)=(2^2+2)(2-3)+2+5=1$