1. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$

$\therefore x^3 = 1$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면

$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$

$\therefore\ a = 3$

2. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot2+12=9$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$　② $a \geq 4$　③ $a \leq 4$
④ $a \geq -4$　⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면
$x^2 - kx + (2k-a) = 0$
실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.
$k^2 - 4(2k-a) \geq 0$
$k^2 - 8k + 4a \geq 0$
위 부등식을 k에 대하여 정리하면
$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$
실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$이거나,
$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.
따라서 $a \geq 4$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$
$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$= -(a + 1)^2 - 4$

m 의 최댓값 : -4

5. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$ 일 때, a^5+b^5 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times10-9\times4\\ &= 244\end{aligned}$$

6. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라 할 때, $Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
④ $\frac{1}{3}\left(3^{30}-1\right)$　⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$
양변에 $x=3$ 을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$ 을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

7. $\alpha,\ \beta$가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$는 각각 $\alpha,\ \beta$의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore\ \alpha + \beta,\ \alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0,\ a,\ b$는 실수이므로 $a = 0,\ b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha = i,\ \beta = 1$
$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$
㉣ :(반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$
$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 $\alpha,\ \beta$가 실수일 때만 성립한다.

8. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

9. α, β를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $ac \neq 0$) 의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2+(b^2-4ac)x+c^2=0$

② $a^2x^2-(b^2-2ac)x-c^2=0$

③ $c^2x^2+(b^2-4ac)x+a^2=0$

④ $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

⑤ $c^2x^2+(b^2-2ac)x+a^2=0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{(b^2-2ac)}{c^2}x+\frac{a^2}{c^2}=0$$

즉, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

10. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$
$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로
$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서
$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$
$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$
$q\neq 0$이므로
$p=1,\ q^2=2$
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$
$\therefore\ x^2-2x+3=0$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

11. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$ 을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$ 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$

$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\left\{3(k-1)\right\}^2-(k-2)(9k+1)>0$

$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$

$-k+11>0$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10 이다.

12. 다항식 $p(x)$는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}+\frac{d}{x-4}+\frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c, d, e는 상수)

㉠ $p(3)=3$이면 $c=3$이다.

㉡ $p(1)=p(5)$이면 $a=e$이다.

㉢ $b=2$이면 $p(2)=-12$이다.

㉣ $a:bc=p(1):p(2)p(3)$이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

주어진 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a+\frac{b(x-1)}{x-2}+\frac{c(x-1)}{x-3}+\frac{d(x-1)}{x-4}+\frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$a=\frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$b=\frac{p(2)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)}$, $c=\frac{p(3)}{2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)}$, $d=\frac{p(4)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)}$, $e=\frac{p(5)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

따라서 ㉡, ㉢만 옳다.

13. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$①
$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$
$\therefore\ b=-3a-9\cdots$②
②를 ①에 대입하면
$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$
양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면
$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$
$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$
②에서 $b=6$
$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \therefore\ a+b=1$

14. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$이 x^2+x+1로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n을 구하는 과정이다. (　　　) 에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

> ω가 다항식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
> $\therefore\ \omega^3,\ \omega \neq 1$
> (i) $n=3k(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=$ (㉠) $\neq 0$
> (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=$ (㉡)
> (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
> 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 (㉢) 이다.

① $1, 0, 3k$　② $2, 1, 3k+1$　③ $3, 0, 3k+2$
④ $3, 0, 3k$　⑤ $2, 1, 3k$

해설

(i) $n=3k$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}$
$=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}$
$=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}$
$=1+1+1(\because\ \omega^3=1)=$ (3) $\neq 0$
(ii) $n=3k+1$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}$
$=\omega^{6k}+2+1+(\omega+1)^{6k}+2$
$=\omega^{6k}\cdot\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}+2$
$=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2$
$=\omega^2+1+\omega=$ (0)
(iii) $n=3k+2$이면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 $(3k)$이다.

15. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=0(\because\ a+b+c=0\ )$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$
$\therefore$(준식) $=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$
$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

16. $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i$,
$i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$이므로
$f(1) = 2i + 1$,$f(2) = -3 + 2i$, $f(3) = -4i - 3$, $f(4) = 5 - 4i$
$f(5) = 6i + 5$,$f(6) = -7 + 6i$, $f(7) = -8i - 7$,$f(8) = 9 - 8i$
① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)
② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)
③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)
④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)
⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} + \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\} = -4i - 4i = -8i$$ (참)

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x = 2$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. $y = a(x-2)^2 - 2$. 또한 최솟값이 존재하므로, $a > 0$ 이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로, y 절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서 y 절편$= 4a - 2 \geq 0$, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로 a의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수는 1 이다.