

1.  $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를  $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수  $a$ 의 값을 구하면?

① -3

② 3

③ -6

④ 6

⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$$\therefore a - 3 = 0, a = 3$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는  $x$ 값을 대입한다.

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

준 식의 좌변에  $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면

$$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

2.  $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 할 때,  $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

### 해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

3.  $x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 = k(x-2) + a$ 가 실수  $k$ 의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수  $a$ 의 값의 범위를 구하면?

①  $a \geq -2$

②  $a \geq 4$

③  $a \leq 4$

④  $a \geq -4$

⑤  $a \geq 2$

### 해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$$x^2 - kx + (2k - a) = 0$$

실근을 가지려면 판별식  $D \geq 0$ 이어야 한다.

$$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$$

$$k^2 - 8k + 4a \geq 0$$

위 부등식을  $k$ 에 대하여 정리하면

$$(k - 4)^2 + 4a - 16 \geq 0$$

실수  $k$ 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$\text{판별식 } \frac{D}{4} \leq 0 \text{ 이거나,}$$

$4a - 16 \geq 0$  ( $\because (k - 4)^2 \geq 0$ ) 이어야 한다.

따라서  $a \geq 4$

4. 이차함수  $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$  의 최솟값을  $m$  이라고 할 때,  $m$  의 최댓값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ 의 최솟값 : } m &= -a^2 - 2a - 5 \\ &= -(a + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

$$m \text{ 의 최댓값 : } -4$$

5.  $a + b = 4$ ,  $a^2 + b^2 = 10$  일 때,  $a^5 + b^5$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$$a + b = 4, a^2 + b^2 = 10$$

$$ab = \frac{1}{2} \{ (a + b)^2 - (a^2 + b^2) \} = 3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$$\begin{aligned} \therefore a^5 + b^5 &= (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^2b^2(a + b) \\ &= 28 \times 10 - 9 \times 4 \\ &= 244 \end{aligned}$$

6.  $x^{30}$ 을  $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $R$ 이라 할 때,  $Q(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

①  $3^{30} + 1$

②  $3^{30} - 1$

③  $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④  $\frac{1}{3}(3^{30} - 1)$

⑤ 0

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

양변에  $x=3$ 을 대입 하면,  $3^{30} = R$

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + 3^{30}$$

양변에  $x=1$ 을 대입하면,  $1 = -2Q(1) + 3^{30}$

$$\therefore Q(1) = \frac{1}{2}(3^{30} - 1)$$

※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

7.  $\alpha, \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단,  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각  $\alpha, \beta$ 의 켈레복소수이고,  $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

㉠  $\alpha = \bar{\beta}$ 이면  $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡  $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때,  $\alpha\beta = 0$ 이면  $\alpha = 0$ 이다.

㉢  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면  $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉣  $\alpha + \beta i = 0$ 이면  $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 없다

### 해설

㉠  $\alpha = a + bi$  ( $a, b$ 는 실수)라 하면

$\alpha = \bar{\beta}$ 이므로  $\beta = a - bi$

$\therefore \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$\therefore \alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 실수이다.

㉡ : ㉠에서  $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$ ,  $a, b$ 는

실수이므로  $a = 0, b = 0$  즉,  $\alpha = a + bi = 0$ 이다.

㉢ : (반례)  $\alpha = i, \beta = 1$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ : (반례)  $\alpha = 1, \beta = i$

$\therefore \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$  ㉢, ㉣는  $\alpha, \beta$ 가 실수일 때만 성립한다.

8.  $x^2 - x + 1 = 0$  의 한 근을  $z$ 라 한다.  $p = \frac{1+z}{3-z}$  일 때,  $7p \cdot \bar{p}$  의 값을 구하면?

① 5

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$  의 근이  $z, \bar{z}$  이므로  
 $z + \bar{z} = 1, z\bar{z} = 1$

$$\begin{aligned}7p \cdot \bar{p} &= 7 \left( \frac{1+z}{3-z} \right) \left( \frac{\overline{1+z}}{\overline{3-z}} \right) \\&= 7 \left( \frac{1+z}{3-z} \right) \left( \frac{1+\bar{z}}{3-\bar{z}} \right) \\&= 7 \left\{ \frac{1 + (z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}}{9 - 3(z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z}} \right\} \\&= 3\end{aligned}$$

9.  $\alpha, \beta$ 를 이차방정식  $ax^2 + bx + c = 0$  (단,  $ac \neq 0$ )의 두 근이라 할 때, 다음 중  $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

①  $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

②  $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③  $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④  $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤  $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

즉,  $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

10. 실계수의 이차방정식  $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근  $\alpha, \beta$ 를 갖고, 두 허근 사이에  $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때,  $b+c$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

### 해설

계수가 실수이므로

$$\alpha = p + qi \text{ 이면 } \beta = p - qi \ (q \neq 0)$$

$$\alpha^2 + 2\beta = 1 \text{ 이므로}$$

$$(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1 \text{ 에서}$$

$$(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$$

$$\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, \ 2q(p - 1) = 0$$

$q \neq 0$ 이므로

$$p = 1, \ q^2 = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \ \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\therefore b = -2, \ c = 3$$

$$\therefore b + c = 1$$

11.  $y = 0$ ,  $y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는  $(x, y)$ 가 2개일 때, 정수  $k$ 의 최댓값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 의 그래프는  $x$ 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식  $(k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로  $k - 2 \neq 0$

$$\therefore k \neq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

또, 이차방정식의 판별식을  $D$  라하면  $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k - 1)\}^2 - (k - 2)(9k + 1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

$$-k + 11 > 0$$

$$\therefore k < 11 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

①, ②에서  $k < 11$ ,  $k \neq 2$

따라서, 정수  $k$ 의 최댓값은 10이다.

12. 다항식  $p(x)$ 는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{x-4} + \frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단,  $a, b, c, d, e$ 는 상수)

- ㉠  $p(3) = 3$ 이면  $c = 3$ 이다.
- ㉡  $p(1) = p(5)$ 이면  $a = e$ 이다.
- ㉢  $b = 2$ 이면  $p(2) = -12$ 이다.
- ㉣  $a : bc = p(1) : p(2)p(3)$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

### 해설

주어진 식의 양변에  $x-1$ 을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a + \frac{b(x-1)}{x-2} + \frac{c(x-1)}{x-3} + \frac{d(x-1)}{x-4} + \frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$a = \frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$$b = \frac{p(2)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)}, \quad c = \frac{p(3)}{2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)}, \quad d = \frac{p(4)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)}, \quad e = \frac{p(5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

따라서 ㉡, ㉢만 옳다.

13.  $n$ 이 자연수일 때,  $x$ 의 정식  $x^n(x^2 + ax + b)$ 를  $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가  $3^n(x-3)$ 이 될 때,  $a+b$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-3)^2Q(x) + 3^n(x-3) \cdots \textcircled{1}$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } 3^n(9+3a+b) = 0$$

$$\therefore b = -3a - 9 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^n(x^2 + ax - 3a - 9) = (x-3)^2Q(x) + 3^n(x-3)$$

$$\therefore (x-3)\{x^n(x+a+3)\} = (x-3)\{(x-3)Q(x) + 3^n\}$$

양변을  $x-3$ 으로 나눈 몫을 비교하면

$$x^n(x+a+3) = (x-3)Q(x) + 3^n$$

$$x=3 \text{을 대입하면 } 3^n(6+a) = 3^n \therefore 6+a = 1 \therefore a = -5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6$$

$$\therefore a = -5, b = 6 \therefore a + b = 1$$

14. 다음은 다항식  $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$  이  $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수  $n$ 을 구하는 과정이다. (      )에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

$\omega$ 가 다항식  $x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 근이라고 하면  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\therefore \omega^3, \omega \neq 1$

( i )  $n = 3k (k = 0, 1, 2, \dots)$  이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = ( \ominus ) \neq 0$$

( ii )  $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$  이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = ( \omin� )$$

( iii )  $n = 3k + 2 (k = 0, 1, 2, \dots)$  이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 ( i ), ( ii ), ( iii ) 에서 구하는  $n$ 은 (  $\omin�$  )이다.

① 1, 0,  $3k$

② 2, 1,  $3k + 1$

③ 3, 0,  $3k + 2$

④ 3, 0,  $3k$

⑤ 2, 1,  $3k$

### 해설

( i )  $n = 3k$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (\omega + 1)^{6k} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (-\omega^2)^{6k} \\ &= (\omega^3)^{2k} + 1 + (\omega^3)^{4k} \\ &= 1 + 1 + 1 (\because \omega^3 = 1) = ( 3 ) \neq 0 \end{aligned}$$

( ii )  $n = 3k + 1$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 2 + 1 + (\omega + 1)^{6k} + 2 \\ &= \omega^{6k} \cdot \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} + 2 \\ &= \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} (-\omega^2)^2 \\ &= \omega^2 + 1 + \omega = ( 0 ) \end{aligned}$$

( iii )  $n = 3k + 2$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 ( i ), ( ii ), ( iii ) 에서 구하는  $n$ 은  $(3k)$ 이다.

15.  $a+b+c=0$ ,  $abc \neq 0$  일 때,  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= 0 (\because a+b+c=0) \\ \therefore a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} + \frac{2}{3} \left( \frac{bc+ca+ab}{abc} \right) \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3abc} = 0 \end{aligned}$$

16.  $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$  이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단,  $n$  은 자연수이고,  $i^2 = -1$  이다.)

- ①  $f(n+1) - f(n)$  은 실수이다.
- ②  $f(n+1) - f(n)$  은 순허수이다.
- ③  $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$  은 실수이다.
- ④  $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$  은 순허수이다.
- ⑤  $f(1) + f(2) + \dots + f(8)$  은 순허수이다.

해설

$k$  가 정수일 때  $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i,$

$i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$  이므로

$$f(1) = 2i + 1, f(2) = -3 + 2i, f(3) = -4i - 3, f(4) = 5 - 4i$$

$$f(5) = 6i + 5, f(6) = -7 + 6i, f(7) = -8i - 7, f(8) = 9 - 8i$$

- ①  $f(3) - f(2) = -6i$  (거짓)
- ②  $f(2) - f(1) = -4$  (거짓)
- ③  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$  (거짓)
- ④  $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$  (거짓)
- ⑤  $f(1) + f(2) + \dots + f(8)$   
 $= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\}$   
 $+ \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$   
 $= -4i - 4i = -8i$  (참)

17. 이차함수  $y = ax^2 + bx + c$  는  $x = 2$  일 때, 최솟값이  $-2$  이다. 이 함수의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않을 때,  $a$  의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

### 해설

$x = 2$  일 때 최솟값  $-2$  를 가진다.  $y = a(x - 2)^2 - 2$ . 또한 최솟값이 존재하므로,  $a > 0$  이다. 그래프가 제3 사분면을 지나지 않는다는 조건을 만족해야 하므로,  $y$  절편이 음이 아닌 실수이어야 한다.

따라서  $y$  절편  $= 4a - 2 \geq 0$ ,  $a \geq \frac{1}{2}$  이므로  $a$  의 값이 될 수 있는 가장 작은 정수는 1이다.