

1. $\sqrt{9x} + \sqrt{48y}$ 가 가장 작은 자연수가 되게 하는 자연수 x 와 y 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = 4$

해설

$$\sqrt{9x} + \sqrt{48y} = \sqrt{3^2x} + \sqrt{2^4 \times 3 \times y}$$

$$x = 1, y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

2. $\sqrt{50-x}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x 는?

① 1

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 14

해설

$\sqrt{49}$ 이므로 $x = 1$ 이다.

3. 다음 중에서 순환하지 않는 무한소수로만 이루어진 것은?

① $\sqrt{21}$, $-\sqrt{7}$, $0.\dot{5}$

② $\sqrt{121}$, $\sqrt{5}-1$, $\sqrt{21}$

③ $-\sqrt{6}$, $\sqrt{3+2}$, $-\sqrt{1}$

④ $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{0.36}$, $\frac{\sqrt{4}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt{8.1}$, $\sqrt{4}+3\sqrt{2}$

해설

① $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$ 는 유리수이다.

② $\sqrt{121} = 11$ 은 유리수이다.

③ $-\sqrt{1} = -1$ 은 유리수이다.

④ $\sqrt{0.36} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ 은 유리수이다.

4. $\left(2 - \frac{5}{4}x\right)^2$ 을 계산할 때, x 의 계수는?

① -5

② -3

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$2^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}x\right)^2 = 4 - 5x + \frac{25}{16}x^2$ 이므로 x 의 계수는
-5 이다.

5. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 을 이용하여 계산하기 가장 알맞은 것은?

① 18×22

② 51×52

③ 99^2

④ 302×403

⑤ 103^2

해설

① $18 \times 22 = (20 - 2)(20 + 2)$

② $51 \times 52 = (50 + 1)(50 + 2)$

③ $99^2 = (100 - 1)^2$

④ $302 \times 403 = (3 \times 100 + 2)(4 \times 100 + 3)$

⑤ $103^2 = (100 + 3)^2$

6. 이차식 $ax^2 + bx + c$ 를 인수분해 하는데 민수는 x 의 계수를 잘못 보고 풀어서

$2(x+1)(x-5)$ 가 되었고, 진영이는 상수항을 잘못 보고 풀어서 $(2x+5)(x-3)$ 이 되었다.

다음 중 $x^2 + Ax + B$ 를 옳게 인수 분해한 것은?

① $(2x-5)(x+2)$

② $2(x+1)^2$

③ $(x-2)(x+2)$

④ $(x-2)(x+3)$

⑤ $(2x-4)(x+5)$

해설

민수는 $2(x+1)(x-5)$ 에서 상수항 -10 을 맞게 보았고,
진영이는 $(2x+5)(x-3)$ 에서 x 의 계수 -1 을 맞게 보았다.
따라서 $2x^2 - x - 10 = (2x-5)(x+2)$ 이다.

7. 다음 다항식 $a^2 - b^2 - c^2 + 2a + 2bc + 1$ 을 인수분해하면?

① $(a + b - c - 1)(a - b - c + 1)$

② $(a - b + c + 1)(a - b - c + 1)$

③ $(a + b + c + 1)(a - b - c + 1)$

④ $(a + b - c + 1)(a - b + c + 1)$

⑤ $(a + b - c - 1)(a - b + c - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 - c^2 + 2a + 2bc + 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 - (b^2 - 2bc + c^2) \\ &= (a + 1)^2 - (b - c)^2 \\ &= (a + 1 + b - c)(a + 1 - b + c) \\ &= (a + b - c + 1)(a - b + c + 1) \end{aligned}$$

8. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 중 가장 큰 것은?

① a

② a^3

③ $\sqrt{a}$

④ $\frac{1}{a^3}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{a}}$

해설

$a = \frac{1}{2}$ 라고 하면

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{8}$

③ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

④ 8

⑤ $\sqrt{2}$

9. $\sqrt{32} - 2$ 와 $\sqrt{8} + 3$ 중 더 작은 수와 $\sqrt{2} + 2$ 와 $\sqrt{3} - 1$ 중 더 큰 수의 합을 구했더니 $a\sqrt{b}$ 였다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 7$

해설

$$\sqrt{32} - 2 - (\sqrt{8} + 3) < 0 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{32} - 2 < \sqrt{8} + 3$$

$$\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{3} - 1) > 0 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{2} + 2 > \sqrt{3} - 1$$

$$\text{두 수의 합은 } \sqrt{32} - 2 + \sqrt{2} + 2 = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 $a + b = 7$ 이다.

10. $x, y > 0$ 이고 $3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} = 126$, $2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} = 84$ 일 때, 상수 $\frac{1}{x} \times y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2x} \times \sqrt{3x} \times \sqrt{6} &= \sqrt{9 \times 2x \times 3x \times 6} \\ &= \sqrt{18 \times 18 \times x^2} \\ &= 18x \end{aligned}$$

$$18x = 126$$

$$\therefore x = 7$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{7} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{y} &= \sqrt{2^2 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times y} \\ &= \sqrt{6^2 \times 14 \times y} \\ &= 6\sqrt{14y} \end{aligned}$$

$$6\sqrt{14y} = 84$$

$$\sqrt{14y} = 14, y = 14$$

$$\therefore \frac{1}{x} \times y = \frac{1}{7} \times 14 = 2$$

11. $\sqrt{20} + \sqrt{0.2} + \frac{4}{\sqrt{5}} = a\sqrt{5}$, $\sqrt{2.5} \times \sqrt{\frac{6}{5}} \times \sqrt{18} = b\sqrt{6}$ 일 때, $a \times b$ 의 값은?

① 4

② 9

③ 16

④ 25

⑤ 36

해설

$$2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{10\sqrt{5} + \sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{5} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore a = 3$$

$$\sqrt{2.5} \times \sqrt{\frac{6}{5}} \times \sqrt{18} = \sqrt{\frac{25}{10} \times \frac{6}{5} \times 18} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore b = 3$$

$$\therefore a \times b = 9$$

12. x, y 가 유리수일 때, $x(2-2\sqrt{2})+y(3+2\sqrt{2})$ 의 값이 유리수가 된다고 한다. $\frac{y}{x}$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= 2x - 2x\sqrt{2} + 3y + 2y\sqrt{2} \\ &= (2x + 3y) + (-2x + 2y)\sqrt{2}\end{aligned}$$

이 식이 유리수가 되기 위해서는

$-2x + 2y = 0$ (x, y 는 유리수)이 되어야 한다.

$$\text{즉, } x = y$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

13. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

A , B , C 가 모두 양수이므로 A^2 , B^2 , C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{20} + \sqrt{80})^2 \\ &= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 \\ &= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 \\ &= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716} \text{ 이므로 } A^2 < B^2 < C^2$$

$$\therefore A < B < C$$

14. $(x+A)(x+B)$ 를 전개하였더니 $x^2 + Cx - 3$ 이 되었다. 다음 중 C 의 값이 될 수 있는 것은?(단, A, B, C 는 정수이다.)

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$(x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + AB = x^2 + Cx - 3$ 이므로
 $A+B=C, AB=-3$ 이다. 따라서 $C = (1-3, -1+3, 3-1, -3+1) = (-2, 2)$ 이다.

15. x 에 관한 이차식을 $2x + 5$ 로 나누면 몫이 $3x + 4$ 이고, 나머지는 1이다. 이때, 이차식은?

① $3x^2 + 12x + 1$

② $3x^2 + 12x + 11$

③ $6x^2 + 23x + 20$

④ $6x^2 + 27x + 20$

⑤ $6x^2 + 23x + 21$

해설

(나누어지는 수) = (나누는 수) $\times$ (몫) + (나머지) 이므로

$$(x \text{에 관한 이차식}) = (2x + 5) \times (3x + 4) + 1 = 6x^2 + 23x + 21$$

16. $x^{16} - 1$ 의 인수 $x^m + 1$ 에 대해 m 이 될 수 없는 것은?

① 1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$x^{16} - 1$$

$$= (x^8 + 1)(x^8 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^4 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

이므로 m 이 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 8 이다.

17. 다음 중 그 값이 나머지 넷과 다른 하나는?

① $(\sqrt{3})^2$

② $\sqrt{9}$

③ $\sqrt{\frac{1}{3}}(3)^3$

④ $\sqrt{3}\sqrt{3^4}$

⑤ $\sqrt{(-3)^2}$

해설

①, ②, ③, ⑤ : 3

④ : $3\sqrt{3}$

18. $x^2 - x + 3 = 4$ 이고 $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

해설

$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$ 에서

$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}} = \sqrt{a + x} = x$ 이므로

$a + x = x^2$, $x^2 - x = a$

$x^2 - x + 3 = 4$ 이므로

$a + 3 = 4$

$\therefore a = 1$

19. $\sqrt{59+a} = b$ 라 할 때, b 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a 와 그 때의 b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 64, 81, 100, ... 이므로

$$59 + a = 64, 81, 100 \dots$$

$$\therefore a = 5, 22, 41, \dots$$

따라서 가장 작은 자연수 $a = 5$, $b = \sqrt{59+5} = 8$ 이다.

$$\therefore a + b = 5 + 8 = 13$$

20. $(x^3 + ax^2 - x + 5)(2x^3 - x^2 + x + b)$ 를 전개하였을 때, x^3 의 계수는 4, x 의 계수는 9 가 되는 a, b 에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{4}$

해설

주어진 식에서 x^3 항은

$$bx^3 + ax^3 + x^3 + 10x^3 = (a + b + 11)x^3$$

$$\text{즉, } a + b + 11 = 4 \quad \therefore a + b = -7 \cdots \textcircled{㉠}$$

x 항은 $-bx + 5x = (5 - b)x$

$$\text{즉, } 5 - b = 9 \quad \therefore b = -4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡를 ㉠에 대입하면 $a = -3$

따라서 $\frac{a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ 이다.

21. 서로 다른 홀수 a, b, c 에 대하여 $2a + 2b + 2ab = 46$, $b + c + bc = 59$, $3c + 3a + 3ca = 117$ 이 성립할 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $abc = 135$

해설

$2a + 2b + 2ab = 46$ 에서

$a + b + ab = 23$, $(a + 1)(b + 1) = 24$

$b + c + bc = 59$ 에서

$(b + 1)(c + 1) = 60$

$3c + 3a + 3ca = 117$ 에서

$c + a + ca = 39$, $(c + 1)(a + 1) = 40$

세 식을 모두 곱하면

$\{(a + 1)(b + 1)(c + 1)\}^2 = 24 \times 60 \times 40$

$\therefore (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 240$

a, b, c 가 서로 다른 세 홀수이므로

$(a + 1), (b + 1), (c + 1)$ 은 서로 다른 세 짝수이어야 한다.

240 을 소인수분해하면, $2^4 \times 3 \times 5$ 이므로

곱해서 240 이 되고 두 수의 곱이 각각 24, 60, 40 인 세 짝수의
순서쌍은

$(a + 1, b + 1, c + 1) = (4, 6, 10)$ 이다.

$(a + 1, b + 1, c + 1) = (4, 6, 10)$ 인 경우,

$a = 3, b = 5, c = 9$ 이므로 $abc = 135$

22. $x^2 - ax - 3x + 3a - 3$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, a 가 될 수 있는 값의 합은? (단, 주어진 다항식은 정수 범위에서 인수분해된다.)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 - ax - 3x + 3a - 3 = (x + \alpha)(x + \beta)$ 로 놓으면

$$x^2 - (a + 3)x + 3a - 3 = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$a + 3 = -(\alpha + \beta) \text{ 에서 } a = -\alpha - \beta - 3$$

$$3a - 3 = \alpha\beta \text{ 에서 } a = \frac{\alpha\beta + 3}{3}$$

$$\therefore -\alpha - \beta - 3 = \frac{\alpha\beta + 3}{3}$$

$$\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 12 = 0$$

$$(\alpha + 3)(\beta + 3) = -3$$

$\alpha + 3 = \pm 1$ 일 때, $\beta + 3 = \mp 3$ 이므로

$$(\alpha, \beta) = (-2, -6) (-4, 0)$$

$$\therefore a = -\alpha - \beta - 3 \text{ 에서 } a = 1, 5$$

23. 다음을 계산하여라.

$$20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -135

해설

$$\begin{aligned} & 20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2 \\ &= (20 + 21)(20 - 21) + (22 + 23)(22 - 23) \\ &\quad + (24 + 25)(24 - 25) \\ &= 41 \times (-1) + 45 \times (-1) + 49 \times (-1) = -135 \end{aligned}$$

24. $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ 일 때,

$\sqrt{a^2 - ab + b^2 + 3}$ 의 값은?

① $5\sqrt{3}$

② 10

③ $10\sqrt{3}$

④ $10\sqrt{6}$

⑤ 15

해설

$$a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{6},$$

$$b = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\therefore a - b = 4\sqrt{6}, ab = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{a^2 - ab + b^2 + 3} &= \sqrt{(a - b)^2 + ab + 3} \\ &= \sqrt{96 + 1 + 3} = \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

25. 세 자연수 x, y, z 에 대하여 $x + y + z + xy + yz + zx = 29 - xyz$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$x + y + z + xy + yz + zx = 29 - xyz \text{ 에서}$$

$$xyz + x + y + z + xy + yz + zx = 29$$

$$xy(z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + z = 29$$

$$xy(z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1) = 30$$

$$(z + 1)(xy + x + y + 1) = 30$$

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 30$$

이때, x, y, z 는 자연수이고 $30 = 2 \times 3 \times 5$ 이므로

$$(x, y, z) = (1, 2, 4)$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 21$$