1. 두 다항식 x^2+ax-2, x^2+3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

최대공약수가 $x-1$이므로 각각의 식에 $x=1$을 대입하면 0이 된다.

$\therefore\ 1+a-2=0,\ 1+3+b=0$에서 $a=1,\ b=-4$

$\therefore\ a+b=-3$

2. 복소수 z 를 원소로 하는 집합 $M = \{z \mid z = (x+y) + (x-y)i,\ x,\ y$는 양의 실수 $\}$일 때, 다음 중 M 의 원소인 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-3-2i$　② $-1+2i$　③ $2+3i$
④ $3+4i$　⑤ $5+2i$

해설

복소수 $z = (x+y) + (x-y)i$ 에서 $x > 0,\ y > 0$ 인 실수이므로
$x+y > 0$ 이고 $x+y > x-y$
따라서 (실수 부분)> 0, (실수 부분)>(허수 부분) 이다.
이를 만족시키는 복소수는 ⑤$5+2i$ 이다.

3. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로
$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$
주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로
$x^2 + y^2 = 4$

4. 다음 중 최댓값을 갖지 않는 것은?

① $y=-4x^2+1$　② $y=-2(x-1)^2+10$

③ $y=x^2+3x+1$　④ $y=-2x^2+3x+1$

⑤ $y=-(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수일 때 최댓값을 갖는다.

5. 삼차방정식 $x^3+27=0$ 의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

6. 실수 a, b에 대하여 $a > b$일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $|a| > |b|$

㉡ $a^3 > b^3$

㉢ $a^2 > b^2$

㉣ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡ , ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a > 0 > b$인 경우에서는 b의 절댓값이 더 클 수도 있다.
㉢ ㉠과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.
㉣ 역시 $a > 0 > b$인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

7. $3x+y=1$이고 $1 \le x \le 5$일 때, y의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -20 ② -16 ③ -12 ④ -8 ⑤ 4

해설

$x=\dfrac{1-y}{3}$이므로 $1 \le x \le 5$에 대입하면

$1 \le \dfrac{1-y}{3} \le 5$, $3 \le 1-y \le 15$

$2 \le -y \le 14$

$\therefore -14 \le y \le -2$

따라서 y의 최댓값은 -2, 최솟값은 -14이므로 합은 -16

8. 부등식 $-1 < -2x+1 < 3$ 의 해를 구하면?

① $-2 < x < 2$　　② $-2 < x < -1$　　③ $-1 < x < 1$

④ $-1 < x < 2$　　⑤ $1 < x < 2$

해설

$-1 < -2x+1 < 3 \rightarrow \begin{cases} -1 < -2x+1 \\ -2x+1 < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$

$\therefore\ -1 < x < 1$

9. 다항식 $x^3 - 3x - 3$을 다항식 $x^2 - 2x - 1$로 나누었을 때의 몫이 $ax + b$이고, 나머지가 $cx + d$이었다. 이 때, $a + b + c + d$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^3 - 3x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(ax + b) + cx + d$
에서 계수를 비교하면
$a = 1,\ -b + d = -3,\ -a - 2b + c = -3,\ b - 2a = 0$
에서 $a = 1,\ b = 2,\ d = -1,\ c = 2$
$\therefore\ a + b + c + d = 1 + 2 + (-1) + 2 = 4$

10. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② −2 ③ 1 ④ −1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \ \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

11. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

12. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

(좌변)$= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로
$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 1$

13. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

14. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$이므로 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

15. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

16. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

17. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$
$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$
가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$
$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

18. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$
④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

19. 임의의 실수 x 대하여 $(1+2x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 항상 성립할 때, $2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}$ 의 값은?

① 1023 ② 1024 ③ 1025 ④ 2046 ⑤ 2050

해설

$x=0$ 대입, $a_0=1$
$x=1$ 대입, $2^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$
$2a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{20}=1+1024=1025$

20. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$라 할 수 있다.
$f(1) = a + b = 2$
$f(-2) = -2a + b = 5$
연립하면, $a = -1 \quad b = 3$
$\therefore R(x) = -x + 3$
$R(2) = 1$

21. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다.　② 단 한 개 있다.

③ 두 개 뿐이다.　④ 세 개 뿐이다.

⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$
$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$
$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로
주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

22. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$　　② 0　　③ i　　④ 1　　⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$
$a,\ b$는 실수이므로 $a=1,\ \ b=0$
$x^3+x=0,\ x(x^2+1)=0,\ \ x=0,\ i,\ -i$
$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

23. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{1-x}{2} < 2 \\ 0.4x + 1.3 < 0.5x + 1.7 \end{cases}$ 를 푼 것은?

① $-6 < x < \dfrac{3}{2}$　② $-4 < x < \dfrac{7}{3}$　③ $-\dfrac{4}{3} < x < 3$
④ $-\dfrac{1}{3} < x < 5$　⑤ $2 < x < \dfrac{11}{4}$

해설

$\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{1-x}{2} < 2 & \cdots ① \\ 0.4x + 1.3 < 0.5x + 1.7 & \cdots ② \end{cases}$

①식을 정리하면

$x + 3 - 2(1 - x) < 8$

$x + 3 - 2 + 2x < 8$

$3x < 7$

$x < \dfrac{7}{3}$

②식을 정리하면

$4x + 13 < 5x + 17$

$x > -4$

$\therefore\ -4 < x < \dfrac{7}{3}$

24. 어떤 직사각형의 세로의 길이가 가로의 길이에서 1cm 을 더한 후 2 배한 것과 같다고 한다. 이 직사각형의 둘레의 길이가 20cm 이상 35 cm 미만이고, 가로의 길이를 x cm 라 할 때, x 의 범위로 옳은 것은?

① $\frac{8}{3} \le x \le \frac{31}{6}$ ② $\frac{8}{3} < x \le \frac{31}{6}$ ③ $\frac{8}{3} < x < \frac{31}{6}$
④ $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{8}{3} \le x$

해설

가로의 길이를 x cm라고 하면 세로의 길이를 $2(x+1)$ cm이다. 이러한 직사각형의 둘레의 길이를 식으로 나타내면 $2x+2\times2(x+1)$ 이고, 정리하면 $6x+4$ 이다. 둘레의 길이가 20cm 이상 35cm 미만을 식으로 표현하면, $20 \le 6x+4 < 35$ 이므로 이를 연립 부등식으로 바꾸면 $\begin{cases} 20 \le 6x+4 \\ 6x+4 < 35 \end{cases}$ 이고 정리하면 $\begin{cases} x \ge \frac{8}{3} \\ x < \frac{31}{6} \end{cases}$ 이다.

따라서 가로의 길이의 범위는 $\frac{8}{3} \le x < \frac{31}{6}$ 이다.

25. 부등식 $|x+1|+|x-2| < x+2$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 6

해설

(i) $x < -1$일 때

$-(x+1)-(x-2) < x+2, -x+1-x < x+2$

$-3x < 1, x > -\frac{1}{3}$ 따라서 해가 없다.

(ii) $-1 \le x < 2$일 때

$(x+1)-(x-2) < x+2$

$x+1-x+2 < x+2,\ x > 1$

$\therefore 1 < x < 2$

(iii) $x \ge 2$일 때

$(x+1)+(x-2) < x+2 \ \therefore x < 3$

$\therefore 2 \le x < 3$

(i), (ii), (iii)에서 해는 $1 < x < 3$

$\therefore \alpha+\beta = 4$