

1. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $(x-1)^2$ 을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$ 이 되도록 상수 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로
 $x^3 + ax^2 + bx + 3$
 $= (x-1)^2(x+k) + 2x+1$
 $= x^3 + (k-2)x^2 + (3-2k)x + k+1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = k-2, b = 3-2k, 3 = k+1$
 $k = 2$ 이므로 $a = 0, b = -1$
 $\therefore a-b = 0 - (-1) = 1$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x-2$ 로 나눈 나머지가 각각 1, 2일 때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x-1$

② $x+1$

③ $-x+1$

④ x

⑤ $-x$

해설

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + ax + b \text{라 하면,}$$

$$f(1) = a + b = 1, \quad f(2) = 2a + b = 2 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 0 \text{이므로 나머지는 } x$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -14

해설

$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4$ 라 하면
 $f(-2) = -5Q(-2) - 4$
그런데 $Q(-2) = 2$ 이므로 $f(-2) = -14$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x+1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x+2)(x-2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x+1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x+3)(x-1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a = -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

5. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

- ① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
 $= (x+1)[(x+1)(a(x+1)+b)+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & -1 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \leftarrow d \\
 & & -1 & 2 & \\
 -1 & 1 & -2 & 3 & \leftarrow c \\
 & & -1 & & \\
 & 1 & -3 & & \leftarrow b \\
 & \uparrow & & & \\
 & a & & &
 \end{array}$$

$\therefore abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

6. 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 최대공약수가 $x+2$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2 일 때, $f(x)+g(x)$ 를 구하면?

- ① $2x^2+5x+2$ ② $2x^2+3x-2$ ③ $2x^2+4x$
④ $2x^2+2x-4$ ⑤ $2x^2+6x+4$

해설

$$\begin{aligned}x^3+2x^2-x-2 &= (x-1)(x+1)(x+2) \\f(x) &= (x+1)(x+2), \quad g(x) = (x-1)(x+2) \quad \text{또는} \quad f(x) = \\&= (x-1)(x+2), \quad g(x) = (x+1)(x+2) \\f(x)+g(x) &= x^2+3x+2+x^2+x-2 \\&= 2x^2+4x\end{aligned}$$

7. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

- ① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= A, (a-b)^n = B \\(\text{준식}) &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\&= 4AB \\&= 4\{(a+b)(a-b)\}^n \\&= 4 \times 2^n \\&= 2^{n+2}\end{aligned}$$

8. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\text{(준 식)} = \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1}$$

$$= x + 1$$

$$= 2006$$

9. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100}-1 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\dots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\dots+a_{100} = 2^m+k$ 이다. $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 98

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{100} = -1 \dots \textcircled{1}$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 2^{100} - 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{100}) = 2^{100} - 2$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{100} = 2^{99} - 1$$

$$\therefore m = 99, k = -1 \text{ 이므로 } m + k = 98$$

10. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소}) \text{이다. 이 때, } m+n \text{의 값을 구하여라.}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

11. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a \\ & x^2+8x=A \text{로 놓으면} \\ & (\text{준식}) = (A+7)(A+15)+a \\ & \quad = A^2+22A+105+a \\ & \quad = (A+11)^2-16+a \end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

12. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

13. $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$ 를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 아닌 것은?

- ① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$
 ④ $a+b+c$ ⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고

차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= a^3b^2 - a^2b^3 + b^3c^2 - b^2c^3 + c^3a^2 - c^2a^3 \\ &= (b^2 - c^2)a^3 - (b^3 - c^3)a^2 + b^2c^2(b - c) \\ &= (b - c)\{(b + c)a^3 - (b^2 + bc + c^2)a^2 + b^2c^2\} \\ &= (b - c)\{(c^2 - a^2)b^2 - a^2(c - a)b - a^2c(c - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(c + a)b^2 - a^2b - a^2c\} \\ &= (b - c)(c - a)\{(b^2 - a^2)c + ab(b - a)\} \\ &= (b - c)(c - a)(b - a)\{(b + a)c + ab\} \\ &= -(a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

14. 두 실수 a, b 에 대하여 $[a, b] = a^2 - b^2$ 라 할 때, $[x^2, x-1] + [2x+1, 3] + [0, 1]$ 을 인수분해하면 $(x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)$ 이다. 이 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?

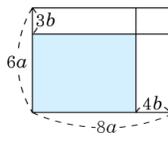
- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & [x^2, x-1] + [2x+1, 3] + [0, 1] \\ &= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1 \\ &= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10 \\ &= x^4 + 3x^2 + 6x - 10 \\ &= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10) \\ &= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c) \end{aligned}$$

따라서, $a = 1, b = 4, c = 10$ 이므로
 $a + b + c = 15$

15. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



- ① $6a^2 - 7ab + 2b^2$ ② $36a^2 - 42ab + 12b^2$
③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$ ④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$
⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$$

16. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10} + 1}{y^2}$ 의 값은?

- ① 4, -1 ② 4, 18 ③ 8, -1 ④ 9, -1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$$y + \frac{1}{y} = 1 \text{ 에서 } \frac{y^2 + 1}{y} = 1$$

$$\therefore y^2 - y + 1 = 0 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\text{양변에 } (y+1) \text{ 을 곱하면 } (y+1)(y^2 - y + 1) = 0$$

$$y^3 + 1 = 0 \therefore y^3 = -1 \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$\frac{y^{10} + 1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y + 1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

17. $a + b = 1$ 이고 $a^2 + b^2 = -1$ 일 때, $a^{2005} + b^{2005}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b = 1 - a$ 를 $a^2 + b^2$ 에 대입하여 정리하면
 $a^2 - a + 1 = 0 \quad (a + 1)(a^2 - a + 1) = 0$
 $a^3 + 1 = 0 \quad \therefore a^3 = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$
 $a^{2005} + b^{2005} = (a^3)^{668} \cdot a + (b^3)^{668} \cdot b = a + b = 1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
 $a^2 - a + 1 = 0$ 에서 $a^2 = a - 1$
 $a^3 = a^2 \cdot a = (a - 1) \cdot a = a^2 - a = -1$
마찬가지 방법으로 $b^3 = -1$

18. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $g(x) = f(f(f(x)))$ 일 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나누는 나머지 $R(x)$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① $R(x)$ 는 0이다. ② $R(x)$ 는 일차식이다.
③ $R(x)$ 는 이차식이다. ④ $R(x)$ 의 상수항은 3이다.
⑤ $R(x)$ 의 상수항은 2이다.

해설

$f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$ 이고
 $g(x) = f(x)Q(x) + R(x)$ 에서
 $g(x) = (x-3)(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
그런데 $g(x) = f(f(f(x)))$ 이므로
 $g(1) = f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
 $g(-1) = f(f(f(-1))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
 $g(3) = f(f(f(3))) = f(f(0)) = f(3) = 0$
 $\therefore g(1) = a + b + c = 0, g(-1) = a - b + c = 0,$
 $g(3) = 9a + 3b + c = 0$
 $\therefore a = b = c = 0$
따라서 $R(x) = ax^2 + bx + c = 0$

19. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b = -\sqrt{2}$, $b + c = \sqrt{2}$ 일 때, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a)$ 의 값은?

- ① 0 ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 - 3(a - b)(b - c)(c - a) \\ &= \{(a - b) + (b - c) + (c - a)\} \\ & \quad \{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ & \quad - (a - b)(b - c) - (b - c)(c - a) - (c - a)(a - b)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

20. $p(x) = x^2 + bx + c$ (b, c 는 정수)가 $x^4 + 6x^2 + 25$ 와 $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ 의 공약수일 때, $p(1)$ 은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

$A = Ga, B = Gb$ 일 때 (a, b 는 서로소)

$kA - B = Gka - Gb$ (k 는 상수)

$= G(ka - b)$ 이므로

G 는 $kA - B$ 의 약수이다.

$3(x^4 + 6x^2 + 25) - (3x^4 + 4x^2 + 28x + 5)$

$= 14x^2 - 28x + 70$

$= 14(x^2 - 2x + 5),$

$p(x) = x^2 - 2x + 5$

$\therefore p(1) = 4$