1. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}=\frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1}=\frac{-i}{1}=-i$$

2. $\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0　② 3　③ $7-2i$　④ $7-i$　⑤ $7+i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\beta = 2-i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1-i$, $\overline{\beta} = 2+i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1+i)(1-i) + (1+i)(2+i) + (1-i)(2-i) + (1-i)(2+i)$

$= (1+1) + (2-1+3i) + (2-1-3i) + (2+1-i)$

$= 7-i$

3. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

① $(x+1)^2 = -3$　② $(x+1)^2 = 3$　③ $(x+3)^2 = -1$
④ $(x+3)^2 = 1$　⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x + a = \pm\sqrt{b}$
$\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면
① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$
② $x = -1 \pm \sqrt{3}$
③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$
④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$
⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

4. 이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3\times\frac{2}{3}=2$

5. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

6. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1 + 2i}{1 - i}$, $z = \dfrac{1 - 2i}{1 - i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$
④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1 + 2i}{1 - i},\ z = \dfrac{1 - 2i}{1 - i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1 + 2i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - 2i)(1 + 2i)}{1 - i} \\ &= \frac{-3 + 4i + 5}{1 - i} \\ &= \frac{2 + 4i}{1 - i} \\ &= -1 + 3i \end{aligned}$$

7. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$ 가 -3 이므로 $-3 + 5 = 2$

8. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

9. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore\ k<4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

10. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

11. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

12. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개　　② 1개　　③ 2개
④ 3개　　⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서
ⅰ) $x<2$일 때,
$-(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)
ⅱ) $2\le x<3$일 때,
$(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)
ⅲ) $x\ge 3$일 때,
$(x-2)+(x-3)=1$
$\therefore\ x=3$

13. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, $a,\ p,\ q$는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

▷ 정답: $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=-1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면

$3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$

$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$

$-a+b+3=0$과 $a-2=0$에서 $a=2,\ b=-1$

15. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

16. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

17. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 합은?

$$(\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{3}+1)x-2\sqrt{3}=0$$

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$\{(\sqrt{3}+1)x-2\}(x+\sqrt{3})=0$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ x=\sqrt{3}-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

$\therefore\ \sqrt{3}-1+(-\sqrt{3})=-1$

18. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9}$ ⋯⋯㉠

$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9}$ ⋯⋯㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2$에서

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0$ $\therefore\ k=12,\ -3$

19. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

$f(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2}$, $\dfrac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$

$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

20. x의 이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x-a+3=0$ (a는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=-(a^2-a-12)=0$, $\alpha\beta=-a+3<0$
$\therefore\ a=4$