

1. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$)을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \textcircled{1} = -\frac{c}{a} + \textcircled{1}$$
$$(x + \textcircled{2})^2 = \textcircled{3}$$
$$x = \textcircled{4} \pm \textcircled{5}$$

① $\frac{b^2}{a^2}$

② $\frac{b}{a}$

③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$

④ $-\frac{b}{a}$

⑤ $-\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

해설

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$
$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$
$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

∴ ⑤가 잘못 되었다.

2. $(x^2 + y^2 - 2)(x^2 + y^2 - 3) - 2 = 0$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x^2 + y^2 = 1$

▷ 정답 : $x^2 + y^2 = 4$

해설

$x^2 + y^2 = A$ 라고 하면
 $(A - 2)(A - 3) - 2 = 0$
 $A^2 - 5A + 4 = 0$
 $(A - 1)(A - 4) = 0$
 $A = 1$ 또는 $A = 4$
 $\therefore x^2 + y^2 = 1$ 또는 $x^2 + y^2 = 4$

3. 다음 이차방정식 중에서 해가 없는 것은?

① $4x^2 - 12x + 9 = 0$

② $x^2 + 2x + 5 = 0$

③ $2x^2 - 4x + 1 = 0$

④ $4x^2 - 7x + 3 = 0$

⑤ $6x - 5x^2 = 0$

해설

② $D = 2^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$

5. 이차방정식 $x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 이 중근을 가질 때의 상수 k 의 값 중 작은 값이 이차방정식 $ax^2 - 2x + a^2 - 4 = 0$ 의 한 근일 때, 음수 a 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$x^2 + (1 - k)x + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$D = a^2 - 2k - 3 = 0$$

$$k = -1, 3$$

$$ax^2 - 2x + a^2 - 4 = 0 \text{ 에 } x = -1 \text{ 을 대입하면}$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = -2, 1$$

$$\therefore a = -2 (\because a < 0)$$

6. 이차방정식 $x^2 + k(4x + 1) + 3 = 0$ 의 해의 개수가 1개일 때, 상수 k 의 값을 구하여라. (단, $k > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + 4kx + k + 3 = 0$ 이 중근을 갖는다.

따라서 $D = (4k)^2 - 4(k + 3) = 0, 4k^2 - k - 3 = 0$

$(4k + 3)(k - 1) = 0$

$k > 0$ 이므로 $k = 1$ 이다.

7. 이차방정식 $x^2 - 9x + k = x - 7$ 의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$x^2 - 9x + k - x + 7 = 0$$

$$x^2 - 10x + k + 7 = 0$$

근이 1개이므로 중근을 갖는다.

$$k + 7 = 25$$

$$\therefore k = 18$$

8. 한 변의 길이가 x 인 정사각형에서 한 변의 길이는 20% 늘이고 다른 한 변의 길이는 20% 줄일 때, 새로 만들어지는 직사각형의 넓이의 변화는?

- ① 1% 줄어든다 ② 1% 늘어난다 ③ 4% 줄어든다
④ 4% 늘어난다 ⑤ 변화가 없다

해설

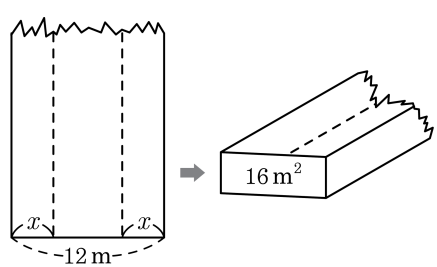
처음 정사각형의 넓이는 x^2

새로운 직사각형의 넓이는

$$(x + 0.2x)(x - 0.2x) = 1.2x \times 0.8x = 0.96x^2$$

따라서 새로 만들어지는 직사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이보다 4% 줄어든다.

9. 다음 그림과 같이 너비가 12m 인 철판을 직사각형 모양으로 접어서 대형 수로를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 16 m^2 일때, x 의 값을 구하는 식으로 옳은 것은?



- ① $x^2 - 8x + 6 = 0$
- ② $2x^2 - 5x + 8 = 0$
- ③ $8x^2 - 6x + 1 = 0$
- ④ $x^2 - 6x + 8 = 0$
- ⑤ $6x^2 - x + 8 = 0$

해설

$$(12 - 2x)x = 16$$
$$2x^2 - 12x + 16 = 0$$
$$\therefore x^2 - 6x + 8 = 0$$

10. 기호 $[a]$ 는 a 의 값을 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[1.2] = 1$, $[\sqrt{5}] = 2$ 이다. 이차방정식 $x^2 - 4x - 7 = 0$ 의 근 중 양수인 것을 a 라 할 때, $(a - [a] + 3)^2$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 7 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$$x^2 - 4x - 7 = 0 \text{ 에서}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$\text{따라서 양수인 근 } a \text{ 는 } 2 + \sqrt{11}$$

$$3 < \sqrt{11} < 4 \text{ 이므로 } 5 < 2 + \sqrt{11} < 6$$

$$\therefore [a] = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore (a - [a] + 3)^2 &= (2 + \sqrt{11} - 5 + 3)^2 \\ &= (\sqrt{11})^2 = 11 \end{aligned}$$

11. 이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 해가 정수일 때, 자연수 a 의 값 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2 - 8x + a = 0$ 의 해 $x = 4 \pm \sqrt{16 - a}$ 가 정수이기 위해서는 근호 안의 수가 제곱수이어야 한다.

a 는 자연수이므로 $0 \leq 16 - a < 16$

$16 - a = 0, 1, 4, 9$

$\therefore a = 7, 12, 15, 16$

따라서 가장 큰 수는 $a = 16$ 이다.

12. 다음 이차방정식의 근을 구하면?

$$0.5(x-2)(x+1) = \frac{1}{3}(x-2)^2$$

- ① 1, -7 ② -7, 2 ③ -4, 9 ④ 3, -5 ⑤ 14, 1

해설

양변에 6을 곱하면

$$3(x-2)(x+1) = 2(x-2)^2$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 2x^2 - 8x + 8$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$(x+7)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 2$$

13. 서로 다른 두 수 x, y 에 대하여 $9x^2 + 18xy + 9y^2 = 2x + 2y$ 의 관계가 성립할 때, $x + y$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : $\frac{2}{9}$

해설

$$9(x + y)^2 - 2(x + y) = 0$$

$A = x + y$ 라 하면 $A(9A - 2) = 0$ 이다.

$\therefore A = 0$ 또는 $A = \frac{2}{9}$ 이다.

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x + y = \frac{2}{9}$

14. 이차방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때, 실수 $a + b + 2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

근이 실수이면 $D \geq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - 2\{1 + (a + b)^2\} \geq 0$$

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\therefore (a + b + 1)^2 \leq 0$$

a, b 는 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b + 2 = 1$$

15. 한 개의 주사위를 두 번 던져 처음 나온 눈의 수를 m , 두 번째 나온 눈의 수를 k 라고 할 때,

이차방정식 $mx^2 + (k-2)x + 2 = 0$ 의 근이 중근이 되는 확률을 $\frac{b}{a}$ 라고 한다. $a+b$ 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$D = (k-2)^2 - 8m = 0$$

$$(k-2)^2 = 8m \text{ 이므로}$$

$$(m, k) = (2, 6) \text{ 이다.}$$

$$\text{확률은 } \frac{1}{36} \text{ 이다.}$$

$$\therefore a+b = 37$$

16. 이차방정식 $x^2 + (-m + 3)x + 24 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?

- ㉠

주어진 이차방정식의 해는 4, 6밖에 없다.
- ㉡

작은 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m > 0$ 이다.
- ㉢

작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m = 13$ 이다.
- ㉤

주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 6이다.

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 3 개
- ⑤ 4 개

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면
 $\alpha(\alpha + 2) = 24$ 에서 $\alpha = 4$ 또는 -6
㉠ $\{4, 6\}$ 또는 $\{-6, -4\}$
㉡ $\alpha < 0$ 이면 두 근은 $-6, -4$ 이고 $m - 3 = -6 - 4 = -10$
 $m = -7$ 이므로 $m < 0$ 이다.
㉢ $\alpha > 0$ 이면 두 근은 $4, 6$ 이고
 $m - 3 = 4 + 6 = 10$
 $\therefore m = 13$
㉤ $m = -7, 13$ 이므로 모든 m 의 값의 합은 6이다

17. 어떤 무리수 x 가 있다. x 의 소수 부분을 y 라 할 때 x 의 제곱과 y 의 제곱의 합이 33이다.

무리수 x 의 값은? (단, $x > 0$)

① $x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$

③ $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{3}$

⑤ $x = \frac{3 + \sqrt{37}}{4}$

② $x = \frac{2 + \sqrt{41}}{5}$

④ $x = \frac{-2 + \sqrt{41}}{5}$

해설

$$x^2 + y^2 = 33, \quad 0 \leq y < 1$$

$$0 \leq y^2 = 33 - x^2 < 1, \quad \sqrt{32} < x \leq \sqrt{33}$$

따라서 x 의 정수 부분은 5이고 $y = x - 5$

$$x^2 + (x - 5)^2 = 33$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \quad (\because x > 0)$$

18. 고속도로의 통행료를 $x\%$ 인상하면 요금을 올리기 전보다 통행료 수입이 78% 줄어들고, 통행 차량의 수도 $8x\%$ 줄어든다고 한다. 통행료의 요금 인상률 x 를 구하여라. (단, 단위는 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 통행차량 수를 B 대 라 하면
인상 후의 통행료는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 통행차량 수는
 $B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right)$ 대, 통행료 수입은 $A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right)$ 원
 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right)$
 $= A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right)$ 이다.
 $\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{8x}{1000}\right) = \left(1 - \frac{78}{100}\right)$
 $2x^2 + 175x - 1950 = 0$
 $(2x + 195)(x - 10) = 0$
 $x > 0$ 이므로 $x = 10$

19. 어떤 물체 A , B 가 같은 직선 위를 움직인다. 물체 A 가 움직인 거리는 움직인 시간 t 에 비례하고, 물체 B 가 움직인 거리는 t^2 에 비례한다. 물체 B 의 12m 뒤에서 물체 B 와 동시에 출발한 물체 A 는 4 분 후에 물체 B 와 만나게 되고, 다시 2 분 후에 한 번 더 만난다고 할 때, 이 이후에 물체 B 가 움직인 거리가 물체 A 가 움직인 거리의 2 배가 되는 시각은 출발한지 몇 분 후인지 구하여라.

▶ 답: 분

▷ 정답: $10 + 2\sqrt{19}$ 분

해설

A 와 B 가 동시에 움직인 시간을 t 라 하면

A 가 움직인 거리는 $s = at$

B 가 움직인 거리 $s' = bt^2$ 이다. (a, b 는 상수)

B 가 흡착인 거리 $s' = bt^z$ 이다. (a, b 는 상수)

A 와 B 는 움직

$$16b + 12 = 4a$$

$$\therefore a = 5, b = \frac{1}{2}$$

따라서 x 분 동안 B 가 움직인 거리는 $\frac{1}{2}x^2$, A 가 움직인 거리는 $5x$ 이다.

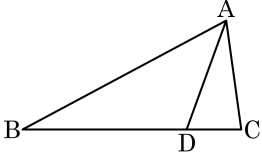
B 가 12m 앞에서 출발하므로 $\frac{1}{2}x^2 + 12 = 2 \times 5x$

$$x^2 - 20x + 24 = 0 \quad \therefore x = 10 \pm 2\sqrt{19}$$

$$x > 6 \text{ 이므로 } x = 10 + 2\sqrt{19}$$

따라서 구하는 시각은 출발한지 $10 + 2\sqrt{19}$ 분 후이다.

20. 다음 그림에서 $\angle ABC = \angle CAD$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$ 이고 선분 AC 의 길이는 선분 CD 의 길이의 2 배일 때, 선분 CD 의 길이를 구 하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\angle ABC = \angle CAD$, $\angle C$ 는 공통이므로
 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (AA 닮음)
따라서 닮음비에 의해 $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$ 의 비례식이 성립
한다.
 $\overline{CD} = x$ 라 놓으면
 $2x : 8 = x : 2x$
 $4x^2 = 8x, x^2 - 2x = 0$
따라서 $x = 2$ 이다.