

1. 두 함수 $(a^2 - 3a + 2)y^2 + 2y - 4x^2 - 1 = 0$ 과 $y = (2a^2 - 8)x^2 - 3x + 1$ 이 모두 y 가 x 에 관한 이차함수가 되도록 상수 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

i) $(a^2 - 3a + 2)y^2 + 2y - 4x^2 - 1 = 0$ 이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $a^2 - 3a + 2 = 0$ 이어야 하므로 $(a - 1)(a - 2) = 0$

$\therefore a = 1$ 또는 $a = 2$

ii) $y = (2a^2 - 8)x^2 - 3x + 1$ 이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $2a^2 - 8 \neq 0$ 이어야 하므로 $a \neq \pm 2$

i), ii) 에 의하여 $a = 1$ 이다.

2. 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-1) = 0$

③ $f(1) = 2$

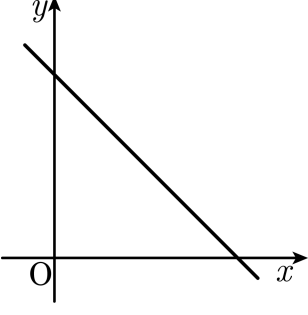
④ $f(2) = 3$

⑤ $f(-2) = 7$

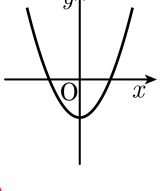
해설

② $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 = 0$

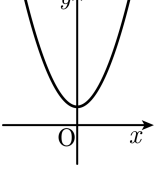
3. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는?



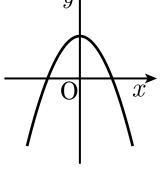
①



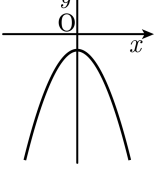
②



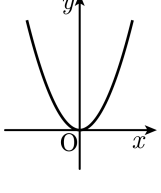
③



④



⑤



해설

$y = ax^2 + b$ 그래프에서 $a < 0, b > 0$ 이므로 위로 볼록하고 y 절편이 양수이다.

4. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 두 점 $(4, 8)$, $\left(b, \frac{9}{2}\right)$ 를 지난다. 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수가 (b, c) 를 지날 때, c 의 값은?(단, $b < 0$)

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

해설

$y = ax^2$ 에 $(4, 8)$, $\left(b, \frac{9}{2}\right)$ 을 대입하면

$a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ 이다.

이 이차함수와 x 축 대칭인 이차함수는

$y = -\frac{1}{2}x^2$ 이고 $(-3, c)$ 를 지나므로

$\therefore c = -\frac{9}{2}$

5. 다음 포물선을 꼭이 좁은 것부터 차례로 쓴 것을 고르면?

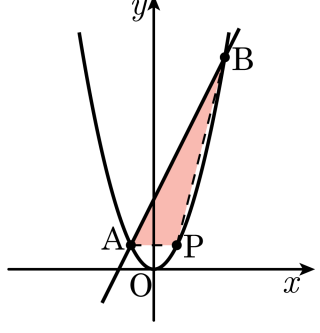
㉠ $y = x^2$	㉡ $y = 4x^2$
㉢ $y = \frac{3}{2}x^2$	㉣ $y = \frac{1}{4}x^2$

- ① ㉠-㉡-㉢-㉣
- ② ㉡-㉢-㉠-㉣
- ③ ㉡-㉢-㉠-㉣
- ④ ㉢-㉠-㉢-㉡
- ⑤ ㉢-㉡-㉢-㉠

해설

이차항의 계수의 절댓값이 클수록 포물선의 폭은 좁아진다.

6. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B 까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표는?



- ① (1,1) ② (1,2) ③ (2,1) ④ (2,4) ⑤ (3,2)

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB와 직선 OP는 평행하므로

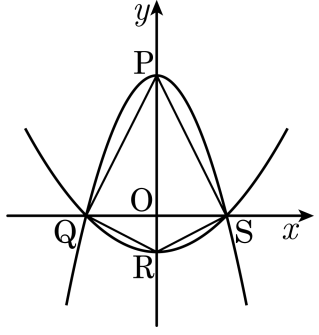
직선 OP의 기울기는 2이고 직선 OP는 $y = 2x$ 이다. 점 P는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점이므로

$$x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$$

$\therefore x = 2, y = 4$ 또는 $x = 0, y = 0$ (원점)

그런데 P는 원점이 아니므로 P(2, 4)이다.

7. 함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



- ㉠ 점 $P(0, 4)$ 이고, 점 $R(0, -1)$ 이다.
 ㉡ 점 $Q(2, 0)$ 이고, 점 $S(-2, 0)$ 이다.
 ㉢ $\overline{QS} = 8$ 이다.
 ㉤ $\triangle PRS = 5$, $\triangle QPR = 8$ 이다.
 ㉥ $\square PQRS = 12$ 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = -x^2 + 4$

함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한

그래프의 식은 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

$y = -x^2 + 4$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 점 $Q(-2, 0)$, $S(2, 0)$ 이다.

$\overline{QS} = 4$

또, $P(0, 4)$ 이고 $R(0, -1)$

$\triangle PRS = \triangle QPR = 5$

따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

8. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k, 4)$ 를 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -5

해설

이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{1}{4}(x+1)^2$ 이다. 점 $(k, 4)$ 를 지나므로 대입하면 $4 = \frac{1}{4}(k+1)^2$, $16 = (k+1)^2$, $k+1 = \pm 4$ 따라서 $k = 3, -5$ 이다.

9. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 점 $(6, k)$ 을 지난다고 할 때, k 의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 5

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 y 축으로 q 만큼, x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x - p)^2 + q$ 이므로 함수의 식은 $y = 3(x - 5)^2 - 6$ 이다. 점 $(6, k)$ 를 지나므로 대입하면 $k = 3(6 - 5)^2 - 6$ 이므로 $k = -3$ 이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b,$$

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$,

$$b = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$$

11. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 x 의 값의 범위는?

① $x > -4$

② $x < -4$

③ $x < 4$

④ $x > 4$

⑤ $x > -5$

해설

$y = -x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 4만큼 평행이동하면 $y = -(x-4)^2$
꼭짓점이 $(4, 0)$ 이고 위로 볼록한 그래프이므로
 $x < 4$ 인 범위에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

12. 이차함수 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 점 $(4, k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$y = 2(-x + 1)^2 - 3$$

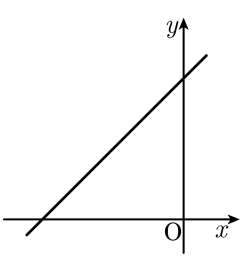
$$y = 2(x - 1)^2 - 3$$

점 $(4, k)$ 를 대입하면

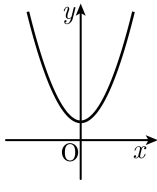
$$2(4 - 1)^2 - 3 = k$$

$$\therefore k = 15$$

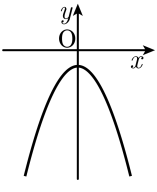
13. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



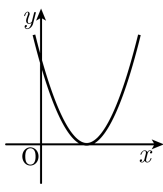
①



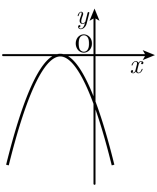
②



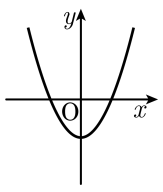
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서
 $a > 0, b > 0$ 이다.

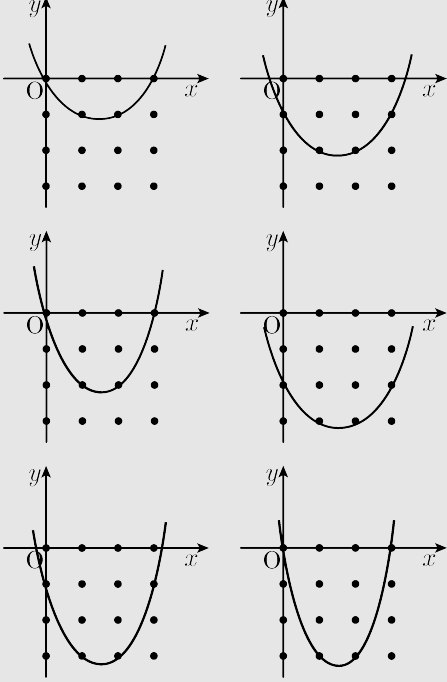
14. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 원점을 포함한 4개의 점을 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3이고 y 좌표가 될 수 있는 정수는 -3, -2, -1, 0이다. 포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 6 개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 6 개의 포물선을 그릴 수 있다. 따라서 구하는 포물선의 개수는 12 개이다.

15. 두 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 5$, $y = -3x^2 + 12x - 4$ 의 그래프가 $y = p$ 와 만나는 두 점을 각각 A, B 와 C, D 라 하고 y 축과 만나는 점을 각각 E, F, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 G, H 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ 의 값을 구하여라. (단, $p < 0$)

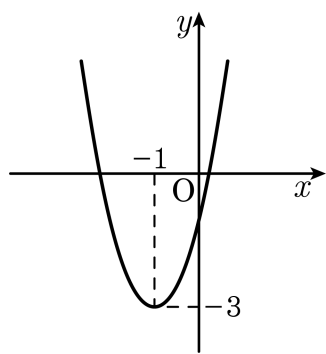
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -3x^2 + 6x + 5$ 는 $y = -3(x - 1)^2 + 8$
 $y = -3x^2 + 12x - 4$ 는 $y = -3(x - 2)^2 + 8$ 이므로
 $y = -3x^2 + 12x - 4$ 의 그래프는 $y = -3x^2 + 6x + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 폭이 같다.
 $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{EF} = \overline{GH}$
 $\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = 2$

16. 다음 그래프는 $y = 2x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이다. 이 그래프의 함수식은 무엇인가?



- ① $y = 2(x + 1)^2 - 3$ ② $y = 2(x - 1)^2 - 3$
③ $y = -2(x + 1)^2 - 3$ ④ $y = 2(x + 1)^2 + 3$
⑤ $y = 2(x - 1)^2 + 3$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, -3)$ 이므로 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 이다.

17. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y = -(x-2)^2$

② $y = \frac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$

③ $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$

④ $y = -3x^2 + x$

⑤ $y = -\frac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

① 1

② 2

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ $\frac{5}{2}$

이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

18. 이차함수 $y = x^2 + px + 4$ 의 그래프가 점 $(1, 6)$ 을 지난다. 이 그래프에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가하는 범위가 될 수 있는 것은?

① $x < 1$

② $x < -1$

③ $x > \frac{1}{2}$

④ $x > -\frac{1}{2}$

⑤ $x > 2$

해설

$(1, 6)$ 을 대입하여 p 의 값을 구하면 $p = 1$ 이다.

$p = 1$ 을 대입하면 $y = x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 - \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 축의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로 $x > -\frac{1}{2}$ 일 때 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 증가한다. 따라서 ④이다.

19. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + p$ 의 그래프에서 x 축과의 두 교점을 A, B 라 하자. $\overline{AB} = 4$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$y = -x^2 - 2x + p = -(x + 1)^2 + p + 1$$

축의 방정식이 $x = -1$ 이고 $\overline{AB} = 4$ 이므로

$$\therefore A(-3, 0), B(1, 0)$$

$$B(1, 0) \text{ 을 } y = -x^2 - 2x + p \text{ 에 대입하면 } -1^2 - 2 + p = 0, \therefore p = 3$$

$$\therefore y = -(x + 1)^2 + 4$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 -1 이다.

20. 이차함수 $y = 2x^2 + 4x - k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k > -2$
- ② $k > -1$
- ③ $k < -2$
- ④ $k < -1$
- ⑤ $k > 0$

해설

아래로 볼록한 포물선이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 꼭짓점의 y 좌표가 음수이어야 한다.

$$y = 2x^2 + 4x - k = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - k = 2(x + 1)^2 + (-2 - k)$$

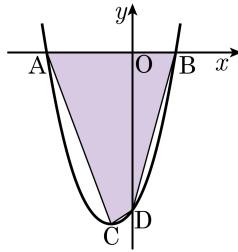
꼭짓점 $(-1, -2 - k)$ 에서 $-2 - k < 0 \quad \therefore k > -2$

해설

$y = 2x^2 + 4x - k$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식 $0 = 2x^2 + 4x - k$ 이 서로 다른 두 근을 갖는다.

$$D = 4^2 + 8k > 0 \quad \therefore k > -2$$

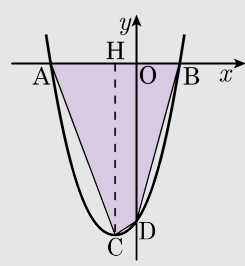
21. 다음 이차함수 $y = x^2 + 2x - 8$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 각각 A, B라 하고 꼭짓점의 좌표를 C, y 축과의 교점을 D라 할 때 $\square ABDC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설



$$\text{i) } 0 = x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

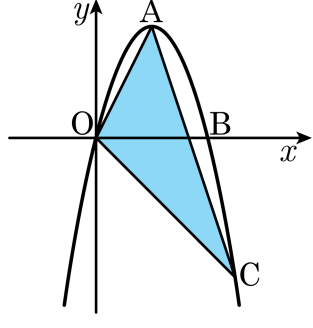
$$\therefore A(-4, 0), B(2, 0), D(0, -8)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } y &= x^2 + 2x - 8 \\ &= (x^2 + 2x + 1) - 9 \\ &= (x + 1)^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\therefore C(-1, -9)$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \square ABDC &= \triangle ACH + \triangle ODB + \square HCDO \\ &= 3 \times 9 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times 8 + (8 + 9) \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{27}{2} + 8 + \frac{17}{2} = 30 \end{aligned}$$

22. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 가 되는 점 C 의 좌표는? (단, 점 A 는 꼭짓점, 점 B 는 포물선과 x 축과의 교점, 점 C 는 포물선 위에 있는 4 사분면의 점이다.)



- ① (5, -5) ② (4, -3) ③ (6, -2)
 ④ (2, -8) ⑤ (3, -4)

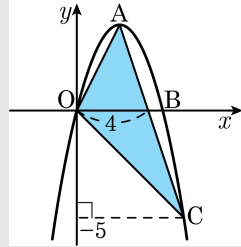
해설

$$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \text{ 이므로 꼭짓점 } A(2, 4)$$

$$\text{또한 } y = 0 \text{ 일 때, } 0 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\text{따라서 점 } B(4, 0) \text{ 이다. } \therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$$\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5 \text{ 이므로 } \triangle OBC \text{ 의 넓이는 } 10 \text{ 이다.}$$



$\triangle OBC$ 의 밑변을 $\overline{OB} = 4$ 라고 하면 높이는 5 가 된다. 즉 점 C 의 y 좌표가 -5 이다.

$$\text{점 C 의 } x \text{ 좌표를 } c \text{ 라고 하면 } -c^2 + 4c = -5$$

$$c^2 - 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c-5)(c+1) = 0, c > 0 \text{ 이므로 } c = 5$$

$$\therefore C(5, -5)$$

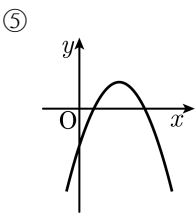
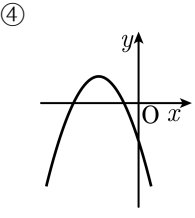
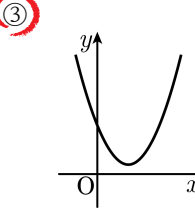
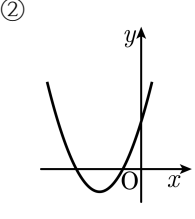
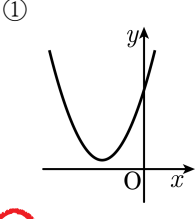
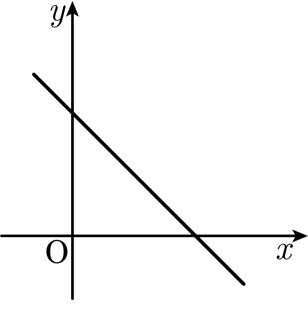
23. 이차함수 $y = 2x^2 - 12x + 10$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 두 개 고르면?
- ㉠ y 절편은 10 이다.
 - ㉡ $x > 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 - ㉢ x 축과 만나는 점의 좌표가 (1, 0), (5, 0) 이다.
 - ㉣ 축의 방정식은 $y = 3$ 이다.
 - ㉤ 그래프는 위로 볼록한 포물선이다.

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10 \\ &= 2(x - 3)^2 - 8 \end{aligned}$$

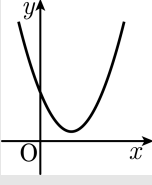
- ㉡ $x > 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
- ㉣ 축의 방정식은 $x = 3$ 이다.
- ㉤ 아래로 볼록한 그래프이다.

24. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?



해설

일차함수의 그래프의 기울기가 음수이므로 $a < 0$, y 절편이 양수이므로 $b > 0$ 이다.



$y = x^2 + ax + b$ 에서 $a < 0, b > 0$ 이면 아래로 볼록이고 축은 y 축 오른쪽에 있으며 y 축과의 교점은 x 축보다 위쪽에 있다.

25.

$a+b=1$ 이고, $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{22}+b^{46}$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

