

1. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
 x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
 $D = (k-3)^2 - 4k < 0$
 $k^2 - 10k + 9 < 0, (k-1)(k-9) < 0$
 $\therefore 1 < k < 9$

2. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 옳게 짝지어진 것은?

① $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \Rightarrow x = -1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 \Rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{2}{3}$

③ $y = -3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{2}{3}$

④ $y = 2x^2 + 12x \Rightarrow x = 3$ 일 때, 최댓값 -3

⑤ $y = -x^2 + 5x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{5}{4}$

해설

① $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = -1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

④ $y = 2x^2 + 12x = 2(x+3)^2 - 18$

$\Rightarrow x = -3$ 일 때, 최솟값 -18

⑤ $y = -x^2 + 5x - 5 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$

3. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k+3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

4. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$y = -2(x - 1)^2 + 5$$

$$= -2(x^2 - 2x + 1) + 5$$

$$= -2x^2 + 4x + 3$$

$$\therefore y = -2x^2 + 4x + 3$$

5. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 점(1,2) 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최솟이며, 최솟값은

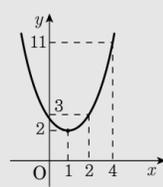
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$$\therefore M = 11$$

$$\therefore M + m = 14$$



6. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

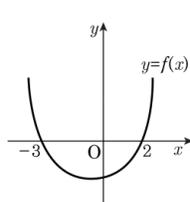
$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
 ④ 4개 ⑤ 5개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로
 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \therefore x = \pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \therefore x = \pm\sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

8. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하고 직선 $y = 4x$ 와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

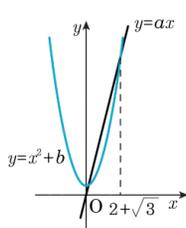
- ① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > 0$
④ $a < 1$ ⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 직선 $y = 4x$ 와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$ 의 판별식을 D' 이라 할 때
 $\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0, -4a + 4 < 0$
 $\therefore a > 1$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

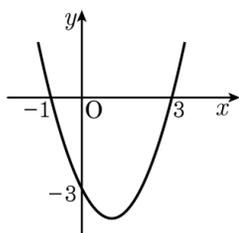
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$x^2 + b = ax$,
 즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
 이때, a, b 는 모두 유리수이므로
 방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
 따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
 $a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
 $b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
 $\therefore a + b = 5$

10. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하면?



- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 x 절편이 $-1, 3$ 이므로 $y = a(x+1)(x-3)$ 이다.

y 절편이 -3 이므로 $a = 1$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(x-3) \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 (최솟값) $= -4$ 이다.

11. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3 \\ &= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2 \end{aligned}$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
 $g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
 $g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

12. $x-1=1-y=\frac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x-1=1-y=\frac{z-3}{2}=k \text{ 라 하면}$$

$$x=k+1, y=1-k, z=2k+3$$

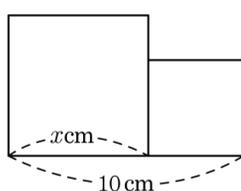
그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2 + (1-k)^2 + (2k+3)^2 \\ &= 6k^2 + 12k + 11 \\ &= 6(k+1)^2 + 5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

13. 다음 그림과 같이 길이가 10cm 인 선분을 둘로 나누어 각각을 한 변으로 하는 두 정사각형을 만들려고 한다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소값을 구하여라.



- ① 20 ② 30 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

한 정사각형의 한 변의 길이를 x cm, 다른 한 정사각형의 한 변의 길이를 $(10 - x)$ cm 라고 놓으면,

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x - 5)^2 - 50 \end{aligned}$$

따라서 최소값은 $50(\text{cm}^2)$ 이다.

14. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a , 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

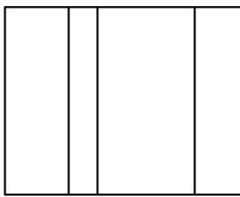
15. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6 \\ &= 2(x-2)^2 + (y+1)^2 - 3 \\ & x, y \text{ 는 실수이므로 } (x-2)^2 \geq 0, (y+1)^2 \geq 0 \\ & \therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3 \\ & \text{따라서, } x=2, y=-1 \text{ 일 때 최솟값은 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

16. 어떤 농부가 길이 700m의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



- ① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로 길이는 $\frac{1}{2}(700 - 5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700 - 5x) \cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2 + 350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2 - 140x + 70^2 - 70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x - 70)^2 + 12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m, 가로가 175m 일 때 최대이다.

17. 길이가 80m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대 하려면 이 울타리의 가로 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

- ① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40 - x)$ m 이므로 목장의 넓이를 y m² 라 하면

$$y = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 때, $0 < x < 40$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.

따라서, 목장의 넓이를 최대 하려면 울타리의 가로의 길이는 20m 로 해야 한다

18. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

- ① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
 $y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80$ 이므로
 $x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
 $0 = -5x^2 + 20x + 60$
 $-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
 $-5(x-6)(x+2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

19. 두 함수 $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 1$ 과 $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

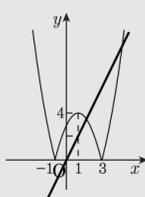
$$f(x) = g(x) \text{ 에서 } |x^2 - 2x - 3| - 1 = 2x - 1$$

$$|x^2 - 2x - 3| = 2x$$

방정식 $|x^2 - 2x - 3| = 2x$ 의 실근의 개수는 함수 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 의 그래프와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 개수와 같다.

$$y = |x^2 - 2x - 3| = |(x + 1)(x - 3)| = |(x - 1)^2 - 4|$$

따라서 다음 그림에서 교점이 2개이므로 구하는 실근의 개수는 2개이다.



20. x 가 실수일 때, $\frac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$\frac{x^2-x+3}{x^2+x+1} = k \text{ 라 하면}$$

$$x^2-x+3 = k(x^2+x+1)$$

$(k-1)x^2 + (k+1)x + k-3 = 0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D \geq 0$ 이다.

$$D = (k+1)^2 - 4(k-1)(k-3) \geq 0$$

$$3k^2 - 18k + 11 \leq 0$$

$$\therefore \frac{9-4\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{9+4\sqrt{3}}{3}$$

$0. \times \times \times \leq k \leq 5. \times \times \times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 의 개수는 5개다.