1. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

2. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 옳게 짝지어진 것은?

① $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \Rightarrow x = -1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 \Rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{2}{3}$

③ $y = -3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{2}{3}$

④ $y = 2x^2 + 12x \Rightarrow x = 3$ 일 때, 최댓값 -3

⑤ $y = -x^2 + 5x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{5}{4}$

해설

① $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{3}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = -1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

④ $y = 2x^2 + 12x = 2(x+3)^2 - 18$

$\Rightarrow x = -3$ 일 때, 최솟값 -18

⑤ $y = -x^2 + 5x - 5 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$

3. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x + 1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k + 3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

4. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2 + 5 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &= -2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

$\therefore y = -2x^2 + 4x + 3$

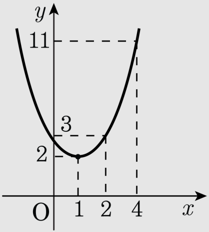
5. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M, 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(ⅰ) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ⅱ) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

6. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11　　② 21　　③ 25　　④ 81　　⑤ 100

해설

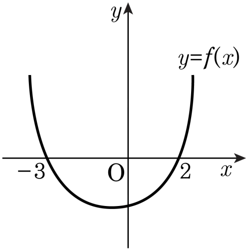
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개

이다.

8. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 x축과는 접하고 직선 $y = 4x$와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > 0$

④ $a < 1$ ⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 직선 $y = 4x$와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$의 판별식을 D'이라 할 때

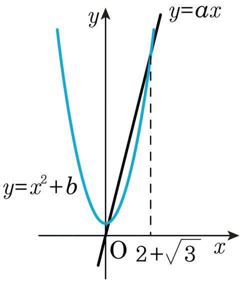
$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0$, $-4a + 4 < 0$

$\therefore a > 1$

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$x^2 + b = ax$,

즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.

이때, a, b 는 모두 유리수이므로

방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면

다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

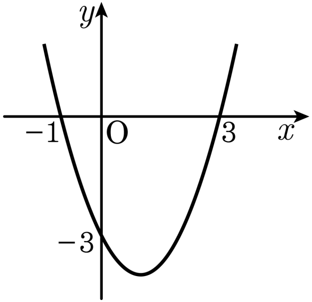
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,

$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$

$\therefore\ a + b = 5$

10. 다음 그림은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프이다. 이 이차함수의 최솟값을 구하면?



① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y=ax^2+bx+c$ 에서 x 절편이 $-1, 3$ 이므로 $y=a(x+1)(x-3)$ 이다.

y 절편이 -3 이므로 $a=1$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= (x+1)(x-3) \\ &= x^2-2x-3 \\ &= (x-1)^2-4 \end{aligned}$$

따라서 (최솟값) $=-4$ 이다.

11. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

12. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면

$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$

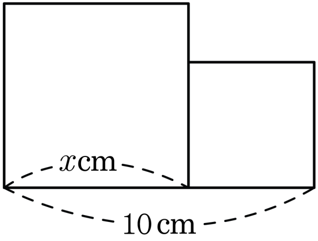
그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

13. 다음 그림과 같이 길이가 10cm 인 선분을 둘로 나누어 각각을 한 변으로 하는 두 정사각형을 만들려고 한다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합의 최솟값을 구하여라.



① 20　② 30　③ 40　④ 45　⑤ 50

해설

한 정사각형의 한 변의 길이를 $x$cm , 다른 한 정사각형의 한 변의 길이를 $(10-x)$cm 라고 놓으면,

$$y = x^2 + (10-x)^2$$
$$= 2x^2 - 20x + 100$$
$$= 2(x-5)^2 - 50$$

따라서 최솟값은 50(cm^2) 이다.

14. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$b = \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a)$$
$$= -a^2 + 8a$$
$$= -(a^2 - 8a + 16 - 16)$$
$$= -(a - 4)^2 + 16$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

15. x, y 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$

$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$

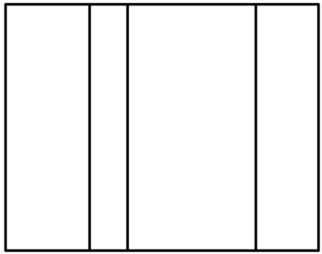
$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

x, y 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서, $x=2$, $y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

16. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2+350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2-140x+70^2-70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2+12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

17. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m ② 20 m ③ 30 m ④ 40 m ⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40-x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m^2 라 하면
$y = x(40-x) = -x^2 + 40x = -(x-20)^2 + 400 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 ㉠은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

18. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 $y=-5x^2+20x+60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초

④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은

$y=-5x^2+20x+60=-5(x-2)^2+80$ 이므로

$x=2$ 일 때 y 의 최댓값은 80

따라서 2 초 후이다.

지면에 떨어질 때 $y=0$ 이다.

$0=-5x^2+20x+60$

$-5(x^2-4x-12)=0$

$-5(x-6)(x+2)=0$

그런데, $x>0$ 이므로 $x=6$

즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

19. 두 함수 $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 1$과 $g(x) = 2x - 1$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

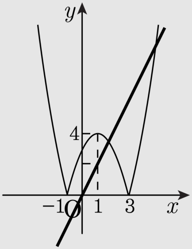
$f(x) = g(x)$에서 $|x^2 - 2x - 3| - 1 = 2x - 1$

$|x^2 - 2x - 3| = 2x$

방정식 $|x^2 - 2x - 3| = 2x$의 실근의 개수는 함수 $y = |x^2 - 2x - 3|$의 그래프와 직선 $y = 2x$의 교점의 개수와 같다.

$y = |x^2 - 2x - 3| = |(x+1)(x-3)| = |(x-1)^2 - 4|$

따라서 다음 그림에서 교점이 2개이므로 구하는 실근의 개수는 2개이다.



20. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} = k$ 라 하면

$x^2 - x + 3 = k\left(x^2 + x + 1\right)$

$(k-1)\,x^2 + (k+1)\,x + k - 3 = 0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$ 일 때, $x = 1$

따라서, $k = 1$ 은 성립한다.

(ii) $k - 1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D \geq 0$ 이다.

$D = (k+1)^2 - 4\,(k-1)\,(k-3) \geq 0$

$3k^2 - 18k + 11 \leq 0$

$\therefore \dfrac{9 - 4\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \dfrac{9 + 4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times \leq k \leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k =$ 1, 2, 3, 4, 5 이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.