1. $a\sqrt{3} = \sqrt{243}$, $b\sqrt{3} = \sqrt{0.0048}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = \dfrac{9}{25}$

해설

$\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$, $a = 9$

$$\sqrt{0.0048} = \sqrt{\frac{2^4 \times 3}{10000}} = \frac{4\sqrt{3}}{100}$$

$$b = \frac{4}{100}$$

$$\therefore \ ab = 9 \times \frac{4}{100} = \frac{9}{25}$$

2. $\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$ 일 때, $\sqrt{54}$ 를 a, b 에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $a+b$ ② $a+b^3$ ③ a^2b^3

④ ab^3 ⑤ a^3b

해설

$$\sqrt{54}=\sqrt{2\times3\times3\times3}=\sqrt{2}(\sqrt{3})^3=ab^3$$

3. $\left(x-\frac{A}{4}\right)^2$ 을 전개한 식이 $x^2+Bx+\frac{1}{16}$ 일 때, A^2+4B^2 의 값을 구하여라. (단, A, B 는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2+2\times x\times\left(-\frac{A}{4}\right)+\left(-\frac{A}{4}\right)^2=x^2-\frac{1}{2}Ax+\frac{A^2}{16}$$

$$A^2=1,\ B^2=\frac{1}{4}A^2$$

$$\therefore A^2+4B^2=1^2+4\times\frac{1}{4}=2$$

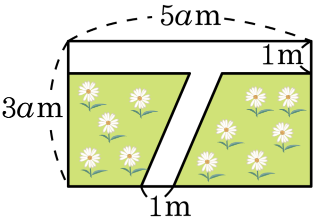
4. $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)$ 을 간단히 하면?

① 63 ② 65 ③ 127 ④ 129 ⑤ 255

해설

$$\begin{aligned}(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1) &= (2^4-1)(2^4+1)\\ &= 2^8-1\\ &= 256-1=255\end{aligned}$$

5. 다음 그림과 같이 가로의 길이가 $5a$m , 세로의 길이가 $3a$m 인 직사각형 모양의 화단 안에 폭이 1m 인 길을 만들었다. 길을 제외한 화단의 넓이는?



① $(15a^2-15a)\text{m}^2$

② $(15a^2-9a)\text{m}^2$

③ $(15a^2-8a)\text{m}^2$

④ $(15a^2-9a+1)\text{m}^2$

⑤ $(15a^2-8a+1)\text{m}^2$

해설

화단 안의 폭을 오른쪽으로 붙여 화단을 직사각형으로 만들면 가로의 길이가 $(5a-1)$, 세로의 길이가 $(3a-1)$ 이 된다. 화단의 넓이는 $(5a-1)(3a-1)=15a^2-8a+1$ 이다.

6. x^2-5x+A, $4x^2+Bx+4$ 가 실수의 범위에서 완전제곱식이 되도록 하는 AB의 값을 구하여라. (단, $B<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $AB=-50$

해설

$x^2-5x+A=(x+a)(x+a)$

$a+a=-5$

$a=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore A=a^2=\dfrac{25}{4}$

$4x^2+Bx+4=(2x+b)(2x+b)$

$b^2=4,\ b=\pm 2$

$B=4b$

$\therefore B=4b=-8\ (B<0)$

$\therefore\ AB=\dfrac{25}{4}\times(-8)=-50$

7. $5x^2+(2a-5)x-14$ 를 인수분해하면 $(x-2)(5x+b)$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$(x-2)(5x+b)=5x^2+(b-10)x-2b$

$5x^2+(2a-5)x-14=5x^2+(b-10)x-2b$

$2b=14 \Rightarrow b=7$, $2a-5=b-10$ 에서 $a=1$

$\therefore a+b=8$

8. 삼각형의 넓이가 $3a^2+a-10$ 이고 높이가 $3a-5$ 일 때, 이 삼각형의 밑변의 길이는?

① $2a+5$ ② $4a-3$ ③ $4a+3$

④ $2a-3$ ⑤ $2a+4$

해설

$S=\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(3a-5)$

$3a^2+a-10=(3a-5)(a+2)=\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(3a-5)$

따라서 밑변의 길이는 $(a+2)\times 2=2a+4$ 이다.

9. $5007 \times 5009 + 1$ 이 어떤 자연수의 제곱일 때, 어떤 자연수를 구하면?

① 5005 ② 5006 ③ 5007 ④ 5008 ⑤ 5009

해설

$$\begin{aligned} 5007 \times 5009 + 1 &= (5008 - 1)(5008 + 1) + 1 \\ &= 5008^2 - 1 + 1 = 5008^2 \end{aligned}$$

10. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $a > 0$)

① 모든 수의 제곱근은 항상 2 개이다.

② a^2 의 제곱근은 a 이다.

③ $\sqrt{a}$ 는 제곱근 a 와 같다.

④ $\sqrt{a^2}$ 의 제곱근은 $\sqrt{a}$ 이다.

⑤ 모든 자연수의 제곱근은 항상 2 개이다.

해설

① 0 의 제곱근은 한 개이고 음수의 제곱근은 없다.
② a^2 의 제곱근은 $\pm a$
④ $\sqrt{a^2}$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}$

11. 다음 중 옳은 것은?

① 어떤 수의 제곱근은 모두 무리수이다.

② 두 무리수의 합은 항상 무리수이다.

③ 유리수와 무리수의 합은 항상 무리수이다.

④ 유리수와 무리수의 곱은 항상 무리수이다.

⑤ 무리수에 무리수를 곱하면 항상 무리수이다.

해설

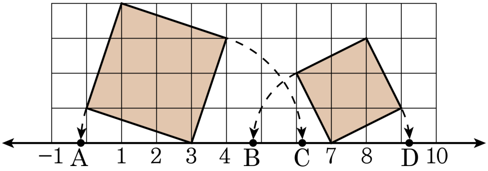
① 제곱수의 제곱근은 유리수

② $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

④ $0\times\sqrt{2}=0$

⑤ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$

12. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때. $a+b+c+d$ 값은? (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



① 10 ② 13 ③ 17 ④ 20 ⑤ 24

해설

$a = 3 - \sqrt{10}$, $b = 7 - \sqrt{5}$, $c = 3 + \sqrt{10}$, $d = 7 + \sqrt{5}$
이므로 $a+b+c+d = 20$ 이다.

13. $\sqrt{57+x} = 4\sqrt{5}$ 일 때, 양수 x 값은?

① 32　　② 23　　③ 11　　④ 9　　⑤ 3

해설

$4\sqrt{5} = \sqrt{80}$

$\sqrt{80} = \sqrt{57+x}$이므로 $x = 23$이다.

14. $x = 3 + \sqrt{2}$ 일 때, $\dfrac{x+7}{x-3}$ 의 값은?

① $-1+5\sqrt{2}$ ② $1-3\sqrt{2}$ ③ $1+5\sqrt{2}$

④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+5\sqrt{2}$

해설

$$\frac{x+7}{x-3} = \frac{10+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{10+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}+1$$

15. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

A, B, C 가 모두 양수이므로 A^2, B^2, C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

$$A^2 = \left(\sqrt{20} + \sqrt{80}\right)^2$$
$$= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600}$$

$$B^2 = (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2$$
$$= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659}$$

$$C^2 = (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2$$
$$= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716}$$

$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716}$ 이므로 $A^2 < B^2 < C^2$

$\therefore A < B < C$

16. $(3x-2y+4z)(2x+2y-4z)$ 를 전개하였을 때, xy, yz, zx 각각의 계수의 합은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$(3x-2y+4z)(2x+2y-4z)$
$=\{3x-(2y-4z)\}\{2x+(2y-4z)\}$
$2y-4z=A$ 로 치환하면
$(3x-A)(2x+A)$
$=6x^2+Ax-A^2$
$A=2y-4z$를 대입하면
$6x^2+(2y-4z)x-(2y-4z)^2$
$=6x^2+2xy-4xz-4y^2+16yz-16z^2$
$\therefore$ xy , yz , zx 각각의 계수의 합 : $2+16+(-4)=14$

17. $[a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]-[b,\ a,\ c]$를 인수분해하면, $(xa+yb+zc)(pa+qb+rc)$ 이다. 이 때, $x+y+z+p+q+r$ 의 값은?

① -1 ② 3 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$(a-b)(a-c)-(b-a)(b-c)$
$=(a-b)(a-c)+(a-b)(b-c)$
$=(a-b)\{(a-c)+(b-c)\}$
$=(a-b)(a+b-2c)$
$\therefore x+y+z+p+q+r$
$=1+(-1)+0+1+1+(-2)=0$

18. $2(x+2)^2+(x+2)(3x-1)-(3x-1)^2=-(ax+b)(cx+d)$ 일 때, $ab+cd$ 의 값을 구하면? (단, a, c 는 양수)

① -1　② 3　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$x+2=A,\ 3x-1=B$로 치환하면

$2A^2+AB-B^2=(2A-B)(A+B)$

$=(2x+4-3x+1)(x+2+3x-1)$

$=-(x-5)(4x+1)$

$\therefore ab+cd=1\times(-5)+4\times1=-1$

19. x^4-13x^2+36을 인수분해했을 때, 일차식으로 이루어진 인수들의 합을 구하면?

① $4x+13$ ② $4x$ ③ $4x-13$

④ $2x^2-13$ ⑤ $2x^2+5$

해설

$x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)$

$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

$\therefore$ (일차식 인수들의 합)

$=x+3+x-3+x+2+x-2=4x$

20. $x = 3 + \sqrt{8}$, $y = 3 - \sqrt{8}$ 일 때, $(x^n + y^n)^2 - (x^n - y^n)^2$ 의 값은?(단, n 은 양의 정수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(x^n + y^n)^2 - (x^n - y^n)^2$

$= (x^n + y^n + x^n - y^n)(x^n + y^n - x^n + y^n)$

$= 2x^n \times 2y^n = 4(xy)^n$

$xy = (3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 1$

$\therefore 4(xy)^n = 4$

21. $a+b=\sqrt{6}$, $ab=1$ 이고, $(a-b)a^2+(b-a)b^2=k$ 라 할 때, k^2 의 값을 구하면?

① 20　　② 21　　③ 22　　④ 23　　⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+b)^2-4ab\\ &= (\sqrt{6})^2-4=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)a^2+(b-a)b^2 &= (a-b)a^2-b^2(a-b)\\ &= (a-b)(a^2-b^2)\\ &= (a+b)(a-b)^2\\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$\therefore\ k^2=(2\sqrt{6})^2=24$

22. 자연수 A 의 양의 제곱근을 a , 자연수 B 의 음의 제곱근을 b 라고 할 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $A < B$)

보기

㉠ $a+b=0$ ㉡ $ab<0$

㉢ $a^2<b^2$ ㉣ $a-b>0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$|a|<|b| \quad \cdots(1)$

$a>0$, $b<0 \quad \cdots(2)$

$(1),\ (2)$ 에 의해 ㉠ $a+b<0$

23. $2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{1024}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{1024}}} &= 2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{(2^5)^2}}}\\ &= 2\sqrt{4\sqrt{8\times 2^5}}\\ &= 2\sqrt{4\times 2^4}\\ &= 2\times 2^3\\ &= 2^4\end{aligned}$$

24. $-2 < x < y < 0$ 일 때, 다음 양수를 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{(2-x)^2}$	㉡ $-\sqrt{(x-2)^2}$
㉢ $\sqrt{(2+y)^2}$	㉣ $-\sqrt{(-y)^2}$
㉤ $-\sqrt{(y-2)^2}$	

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠,㉢ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠$-2 < x < y < 0$ 이므로 $2 < 2-x < 4$

$\Rightarrow 2 < \sqrt{(2-x)^2} = 2-x < 4$

㉡$-2 < x < 0$ 이므로 $-4 < x-2 < -2$

$\Rightarrow -4 < x-2 < -2$

㉢$-2 < y < 0$ 이므로 $0 < y+2 < 2$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{(2+y)^2} = y+2 < 2$

㉣$-2 < y < 0$ 이므로 $0 < -y < 20$

$\Rightarrow -2 < -\sqrt{(-y)^2} = -(-y) = y < 0$

㉤$-2 < y < 0$ 이므로 $-4 < y-2 < -2$

25. $100 \leq a \leq 200$ 일 때, $\sqrt{7a}$ 가 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 287

해설

$a = 7 \times x^2$

$100 \leq 7 \times x^2 \leq 200$

$14. \times \times \leq x^2 \leq 28. \times \times$

$x = 4,\ 5$

$a = 112,\ 175$

$\therefore\ 112 + 175 = 287$

26. $\sqrt{144-x}-\sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 253

해설

$\sqrt{144-x}-\sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되려면
$\sqrt{144-x}$ 는 최댓값, $\sqrt{25+y}$ 는 최솟값을 가져야 한다.
$\sqrt{144}(=12)>\sqrt{144-x}$ 이므로
$\sqrt{144-x}=11$ 일 때, 최댓값을 갖는다.
$144-x=11^2$ 에서 $x=23$
또, $\sqrt{25}(=5)<\sqrt{25+y}$ 이므로
$\sqrt{25+y}=6$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
$25+y=6^2$ 에서 $y=11$
$\therefore xy=23\times11=253$

27. 부등식 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2}$ 을 만족하는 자연수 x 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2}$ 이므로

$2 < \sqrt{2x} \leq 3$

각 변을 제곱하면

$4 < 2x \leq 9$

$2 < x \leq \frac{9}{2}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 자연수는 3, 4 이다.

28. 함수 $f(x)$는 각 항의 계수가 유리수인 이차함수이다. 이러한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 식이 성립할 때, 함수 $f(x)$의 상수항을 구하여라.

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}) = 7 + \sqrt{2} \\ f(\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$로 놓으면

$f(\sqrt{2}) = 2a + b\sqrt{2} + c = 7 + \sqrt{2} \cdots$ ①

$f(\sqrt{3}) = 3a + b\sqrt{3} + c = 2 + \sqrt{3} \cdots$ ②

①에 의하여 $2a + c = 7$

②에 의하여 $3a + c = 2$

연립방정식을 풀면 $\therefore\ a = -5,\ c = 17$

29. 다음을 참고하여 $\sqrt{47}$ 의 소수 둘째 자리 값을 구하여라.

$685^2 = 469225$, $686^2 = 470596$,
$687^2 = 471969$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$469225 < 470000 < 470596$ 이므로
$685^2 < 47 \times 10^4 < 686^2$
$685 < \sqrt{47} \times 10^2 < 686$
$6.85 < \sqrt{47} < 6.86$
따라서 $\sqrt{47}$ 의 소수 둘째 자리 값은 5 이다.

30. $abc=-4$, $a+b+c=0$ 일 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a+b+c=0$ 에서 $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ 이므로
주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= (-c)\times(-a)\times(-b)\\ &= -abc = -(-4) = 4\end{aligned}$$

31. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=a3^b-2^c$ 일 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})$
$=a3^b-2^c$ 에서 양변에 $(3-2)$ 를 곱하면
$(3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=(3-2)(a3^b-2^c)$
$(3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=a3^b-2^c$
$(3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=a3^b-2^c$
$3^{32}-2^{32}=a3^b-2^c$
$\therefore\ a=1,\ b=32,\ c=32$
$\therefore\ a+b+c=65$

32. $x^2 - 8x + 1 = 0$ 일 때, $2x^2 + \dfrac{2}{x^2} + 4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 128

해설

$x^2 - 8x + 1 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 8$$

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4 = 2\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$ 이므로

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \times 8^2 = 128$$

33. $x^2 + Ax + 12 = (x+a)(x+b)$ 일 때, 다음 중 상수 A 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?(단, a, b 는 정수)

① 8 ② -13 ③ -8 ④ -7 ⑤ 1

해설

$ab = 12$가 되는 경우

$(\pm 1, \pm 12), (\pm 2, \pm 6), (\pm 3, \pm 4)$

$A = a + b$이므로

A가 될 수 있는 수는 $\pm 13, \pm 8, \pm 7$