1. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근을 구하면 $x=a\pm\sqrt{b}i$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-4x+6=0$

근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$

$\therefore a=b=2,\quad a+b=4$

2. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$D' = 9-5(a-5) = -5a+34 < 0$

$\therefore a > \dfrac{34}{5}$

3. 이차함수 $y = x^2 - 4x - 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$$y = x^2 - 4x - 7$$
$$= (x-2)^2 - 11$$

$x = 2$ 일 때, 최솟값 -11 을 갖는다.

4. 이차함수 $y=-x^2+4x-3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+2x+3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

최댓값 $m=1$

$y=\frac{1}{3}x^2+2x+3=\frac{1}{3}(x+3)^2$

최솟값 $n=0$

$\therefore mn=1\times 0=0$

5. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$

복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$

$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned} \therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i) \\ &= 1-(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

6. $i^{2000} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $1 - i$ ③ $1 + i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 1 + (-1) + (-i) + 1 \\ &= 1 - i\end{aligned}$$

7. $x = 2009,\ y = 7440$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　② 1　③ -1　④ i　⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$

$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2 i - x^2 i + xy} = 0$$

따라서 구하는 값은 0

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

9. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는

아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

10. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$　② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$　③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$　⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \cdots ㉠ \\ x - y = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore \ x = \frac{3}{2}, \ y = \frac{1}{2}$

12. 다음 조건을 모두 만족하는 0 이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여 식 $\sqrt{a} \times \sqrt{a} + \dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{2c}}{\sqrt{-2c}}$ 을 간단히 하면?

㉠ $a > b > c$	㉡ $ac < bc$
㉢ $\lvert bc \rvert = bc$	㉣ $a > 0$

① a ② $a - 2i$ ③ $a + 2i$

④ $-a$ ⑤ $-a - 2i$

해설

i) $a > b > c, \quad ac < bc \quad \Rightarrow \quad c < 0$

ii) $\lvert bc \rvert = bc \;\Rightarrow\; b,\ c$는 같은 부호$\Rightarrow \quad b < 0$

$$\therefore\ \sqrt{a} \times \sqrt{a} + \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{-2c}}$$

$$= \lvert a \rvert + \sqrt{\frac{-b}{b}} - \sqrt{\frac{2c}{-2c}}$$

$$= a + i - i = a$$

13. 삼차방정식 $x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ $-1,\ 3$　④ $0,\ 3$　⑤ 3

해설

$x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$, $(x-1)(x^2+2x-k) = 0$이 중근을 가지려면

ⅰ) $x = 1$이 중근일 때,

$1 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k = 3$

ⅱ) $x^2 + 2x - k = 0$이 중근이면

$$\frac{D}{4} = 1 + k = 0$$

$\therefore\ k = -1$

14. 삼차방정식 $x^3+ax+16=0$이 중근 α와 다른 실근 β를 가질 때, 상수 a의 값은?

① -12　② -14　③ -16　④ -18　⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\alpha+\beta=0,\ \beta=-2\alpha$

$\alpha\times\alpha\times\beta=-16$에서

$-2\alpha^3=-16,\ \alpha=2,\ \beta=-4$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

일차항의 계수 $=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha=a$

$\therefore\ a=-12$

15. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0　② 15　③ 10　④ -10　⑤ -15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$에 $3x^2 + y = 6$ 대입.

$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

$x = \pm 1,\ \pm 2$

x의 합 : $+1 - 1 + 2 - 2 = 0$

16. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① $\times 3-$ ② $\times 2$하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ y\pm 1,\ x\pm 1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

17. 방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -8 ④ -14 ⑤ -17

해설

방정식 $x^2+3x+1=0$의 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0,\ \beta^2+3\beta+1=0$

$\alpha^2+1=-3\alpha,\ \beta^2+1=-3\beta$

$\therefore\ (\alpha^2+5\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)$

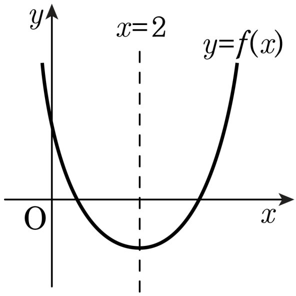
$=(-3\alpha+5\alpha)(-3\beta-4\beta)$

$=-14\alpha\beta$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha\beta=1$이므로

(주어진 식)$=-14$

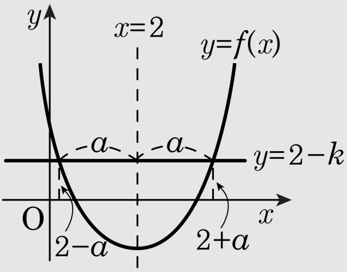
18. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2-k$ 또는 $f = 2+k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2-k$ 또는 $f(x) = 2+k$



(ⅰ) $f(x) = 2-k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2-k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2-\alpha$ 또는 $x = 2+\alpha$
(ⅱ) $f(x) = 2+k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2-\beta$ 또는 $x = 2+\beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2-\alpha)+(2+\alpha)+(2-\beta)+(2+\beta) = 8$

19. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right) \geq 0$$

$-x^2+5 \geq 0,\ x^2-5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

20. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 x% 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x$% 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 x% 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$개이므로
판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25$(%) 일 때 판매 금액은 최대가 된다.