

1.  $x$ 에 대한 다항식  $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ 가 다항식  $x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지도록 상수  $a, b$ 의 값을 정하면?

①  $a = 7, b = -6$     ②  $a = 6, b = -5$     ③  $a = 5, b = -3$

④  $a = 4, b = -5$     ⑤  $a = 3, b = 7$

해설

직접 나누면

몫이  $2x - 3$ , 나머지가  $(a - 7)x + b + 6$ 이므로

$$2x^3 - 5x^2 + ax + b$$

$$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$$

$x^2 - x + 2$ 로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로

$$(a - 7)x + b + 6 = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

2.  $x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이  $m$ 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수  $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식  $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

$m$ 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

3.  $x^2 - 5x + 6 < 0$  일 때,  $P = x^2 + 5x + 6$  이 취할 수 없는 값은?

- ① 22      ② 24      ③ 26      ④ 28      ⑤ 30

해설

$$x^2 - 5x + 6 < 0, (x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\text{이 때, } P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$2 < x < 3$  인 구간에서의  $P$  는 증가함수이다.

따라서  $P_{x=2} < P < P_{x=3}$  이 성립한다.

$$P_{x=2} = 20, P_{x=3} = 30 \text{ 이므로 } 20 < P < 30$$

4. 사차방정식  $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 의 한 근이 1일 때, 허근은?

- ①  $\pm i$       ②  $\pm 2i$       ③  $\pm 3i$       ④  $\pm 4i$       ⑤  $\pm 5i$

해설

한 근이 1이므로 사차방정식  $x^4 + 3x^2 + a = 0$ 에 대입하면  
 $1 + 3 + a = 0, \quad \therefore a = -4$   
방정식  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ 에서  $x^2 = t$ 로 치환하면  
 $t^2 + 3t - 4 = 0, (t+4)(t-1) = 0, (x^2+4)(x^2-1) = 0$   
 $\therefore x = \pm 2i$  또는  $x = \pm 1$   
따라서, 주어진 방정식의 허근은  $\pm 2i$ 이다.

5.  $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  이고,  $a = \sqrt{3} + 1$  일 때,  $a^x \div a^{2\sqrt{2}x+3}$  의 값을 구하면?

①  $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

②  $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③  $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i)  $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  에서  $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii)  $a^x \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2 - 2\sqrt{2}x - 3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

6. 삼차항의 계수가 1인 삼차식  $f(x)$  에 대하여  $f(1) = f(2) = f(3) = 3$  이 성립할 때,  $f(0)$  의 값은?

- ① -6      ② -4      ③ -3      ④ 1      ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + c \text{ 라고 두면,} \\ f(1) &= 1 + a + b + c = 3 \\ f(2) &= 8 + 4a + 2b + c = 3 \\ f(3) &= 27 + 9a + 3b + c = 3 \\ \text{세 식을 연립하여 풀면} \\ a &= -6, b = 11, c = -3 \\ f(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 3 \\ \therefore f(0) &= -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} f(1) = f(2) = f(3) &= 3 \text{ 이므로} \\ f(x) - 3 &= (x-1)(x-2)(x-3) \\ f(0) - 3 &= -1 \times (-2) \times (-3) = -6 \\ \therefore f(0) &= -3 \end{aligned}$$

7. 모든 실수  $x$ 에 대하여 등식  $x^{100}-1 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\dots+a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때,  $a_0+a_2+a_4+\dots+a_{100} = 2^m+k$ 이다.  $m+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 98

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{100} = -1 \dots \textcircled{1}$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 2^{100} - 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{100}) = 2^{100} - 2$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{100} = 2^{99} - 1$$

$$\therefore m = 99, k = -1 \text{ 이므로 } m + k = 98$$

8.  $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$  일 때,  $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= f(-i) + f(i)$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$

$$= i^{98} + (-i)^{98}$$

$$= i^2 + i^2$$

$$= -2$$

9.  $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10} + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^8$  값을 구하면?

- ①  $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$       ②  $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$       ③ 1  
④ 0      ⑤ -1

해설

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, 2\omega+1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$(\omega-1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(\omega^3)^3 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

10. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.

1kg에  $p$ 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는  $p$ 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

- ① 2600원      ② 2670원      ③ 2700원  
 ④ 2750원      ⑤ 2800원

**해설**

3000원에서 10x원 가격을 내렸을 때  
 1kg의 판매가격은  $3000 - 10x$   
 1일 판매량은  $100 + 3x$   
 따라서 하루의 이익  $P$ 는  

$$P = (3000 - 10x)(100 + 3x) - 2000(100 + 3x)$$

$$= (1000 - 10x)(100 + 3x)$$

$$= -30x^2 + 2000x + 100000$$

$$= -30\left(x^2 - \frac{200}{3}x\right) + 100000$$

$$= -30\left(x - \frac{100}{3}\right)^2 + \frac{400000}{3}$$
 $x$ 가 문제에서 정수이므로  $x = 33$ 일 때 최대이다.  
 따라서  $3000 - 330 = 2670$ (원)

11.  $a, b, c, d$ 가 실수이고  $a^2 - b^2 = 3$ ,  $c^2 + d^2 = 4$ ,  $ab = 1$ ,  $cd = 2$ 일 때,  $a^2d^2 - b^2c^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4      ② 5      ③ 6      ④ 7      ⑤ 8

해설

$$a^2 - b^2 = 3 \dots \text{㉠}$$

$$c^2 + d^2 = 4 \dots \text{㉡}$$

$$ab = 1 \dots \text{㉢}$$

$$cd = 2 \dots \text{㉣}$$

$$\text{㉡}, \text{㉣에서 } (c-d)^2 = 0 \quad (\because 2cd = 4)$$

$$\therefore c = d, \quad c^2 = d^2 = 2 \dots \text{㉤}$$

$$\text{㉠}, \text{㉤에서 } a^2d^2 - b^2c^2 = 2(a^2 - b^2) = 2 \times 3 = 6$$

12. 두 다항식  $x^3 + ax^2 + bx + 1$  과  $x^3 + bx^2 + ax + 1$  의 최대공약수가 일차식일 때,  $a + b$  의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  ,  $B(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$  로 놓으면

$A(x) - B(x)$

$$= (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1)$$

$$= (a - b)x(x - 1)$$

$A(x)$ ,  $B(x)$  의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는  $x$  이거나  $x - 1$  이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는  $x - 1$  이다.

따라서 다항식  $A(x)$  는  $x - 1$  을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$$A(1) = 1 + a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a + b = -2$$

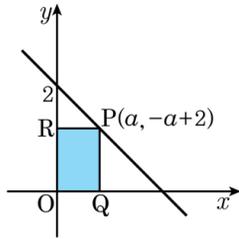
13.  $x$ 에 대한 방정식  $x^2 - 2px + p + 2 = 0$ 의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수  $p$ 의 값의 범위는?

- ①  $-2 < p < 0$       ②  $-2 \leq p < 0$       ③  $-2 < p \leq 0$   
④  $-2 \leq p \leq 0$       ⑤  $0 \leq p < 2$

해설

$x^2 - 2px + p + 2 = 0$ 의 근은  
 $x = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2} \dots \dots \textcircled{1}$   
(i)  $\textcircled{1}$ 이 실근일 때  
 $p^2 - p - 2 \geq 0, 2p < 0, p + 2 > 0$   
 $\therefore -2 < p \leq -1$   
(ii)  $\textcircled{1}$ 이 허근일 때  
 $p^2 - p - 2 < 0$ 이고  $p < 0$   
 $\therefore -1 < p < 0$   
이상에서 구하는  $p$ 의 조건은  $-2 < p < 0$

14. 다음 그림과 같이 직선  $y = -x + 2$  위의 점 P에서  $x$  축과  $y$  축에 내린 수선의 발은 각각 Q, R 이고, 점 P의 좌표는  $(a, -a + 2)$ , 직사각형 OQPR의 넓이를  $y$ 라 할 때,  $y$ 의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제1사분면이다.)



▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

점 P의 좌표는  $(a, -a + 2)$  이고 넓이는  $y$  이므로

$$y = a(-a + 2) = -a^2 + 2a$$

$$= -(a^2 - 2a + 1) + 1$$

$$= -(a - 1)^2 + 1$$

따라서  $y$ 의 최댓값은 1이다.

15.  $x^3 + ax + 1 = 0$  의 세 근을  $\alpha, \beta, \gamma$  라 할 때,  $\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}$  를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

- ①  $x^3 - ax^2 - 1 = 0$                       ②  $x^3 - ax^2 + 1 = 0$   
 ③  $x^3 + ax^2 - 1 = 0$                       ④  $x^3 + ax^2 + 1 = 0$   
 ⑤  $x^3 + ax - 1 = 0$

**해설**

$x^3 + ax + 1 = 0$  의 세 근이  $\alpha, \beta, \gamma$  이므로  
 근과 계수의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\therefore \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{같은 방법으로 } \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = a$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

따라서, 구하는 삼차방정식은

$$x^3 - ax^2 - 1 = 0 \text{ 이다.}$$