1. 다음 보기에 주어진 수를 x라 할 때, $\sqrt{x}$가 허수가 되는 x의 개수는?

$-2,\ \dfrac{1}{3},\ 0,\ -3.5,\ 4,\ -\dfrac{2}{5}$

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 7 개 ⑤ 9 개

해설

$\sqrt{x}$가 허수가 되는 $x = -2,\ -3.5,\ -\dfrac{2}{5}$의 3 개이다.

2. 이차방정식 $3x^2-2x-1=0$의 근을 A, B (단, $A<B$)라 할 때, $3A+B$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$3x^2-2x-1=0$

$(3x+1)(x-1)=0$

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$\therefore \quad 3A+B=0$

3. 이차방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3\times\frac{2}{3}=2$

4. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x+0.5y=2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2,3)$ ② $(-2,3)$ ③ $(3,2)$

④ $(3,-2)$ ⑤ $(-3,-2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x+5y=28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x+3y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y=-8$

$\therefore\ y=2$를 ㉣에 대입하면 $x=3$

$\therefore\ x=3,\ y=2$

5. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$ ② $2\pm3i$ ③ $2\pm\sqrt{3}i$

④ $3\pm2i$ ⑤ $4\pm3i$

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로
$z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 에서
$(a+bi)(a-bi)=13$, $(a+bi)+(a-bi)=4$
$a^2+b^2=13$, $2a=4$
$\therefore\ A=2,\ b=\pm3$
$z=2\pm3i$

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

7. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

8. 이차함수$y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은-19 이다.

9. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

10. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1 식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$
$\therefore\ x=1,\ -1,\ -3$
제 2 식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=1,\ -1,\ -2$
제 3 식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$
$\therefore\ 1,\ 2$
∴공통근 : $x=1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$ 을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

12. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$㉠
$y = x + 1 \quad \cdots$㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

13. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{33}{16}$

해설

$y = -x^2 + 4ax + a - 2$
$= -(x^2 - 4ax) + a - 2$
$= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2$

최댓값 $M = 4a^2 + a - 2$
$= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2$
$= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2$
$= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

14. $x+y=3, x\geq 0, y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$y=3-x\geq 0$

$\therefore\ 0\leq x\leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

15. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4}=4-y^2-y+2\geq 0$

$(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

16. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$

α 의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$

$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$

α 의 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$

α 의 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$

$a=-1$

$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$

$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$

$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

17. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2 ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a이면
다른 한 근은 $\dfrac{1}{a}$이다.

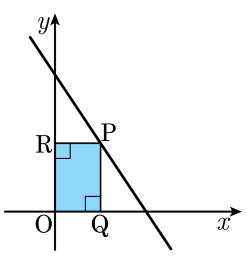
$\therefore \quad a+\dfrac{1}{a}=k^2=\dfrac{2k+5}{3}$

$\therefore \quad 3k^2-2k-5=0$

$k=\dfrac{5}{3}$ 또는 -1

$\therefore$ 양수 $k=\dfrac{5}{3}$

18. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답:

▷ 정답: $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\begin{aligned}\square\mathrm{OQPR}=ab&=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\&=-\frac{3}{2}a^2+3a\\&=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

19. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

20. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 모두 구하면?

① -1　② $0, 8$　③ $-1, 8$

④ $-1, 0, -8$　⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$을 중근으로 가질 때
$x=1$을 $x^2-ax+2a=0$에 대입하면 $a=-1$
(ii) $x^2-ax+2a=0$이 중근을 가질 때
$D=a^2-8a=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 8
(i), (ii)에 의하여 $a=-1,\ 0,\ 8$